

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов серии	3
Предисловие	3

ЧАСТЬ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Введение	4
Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка . .	10
§ 1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	10
§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными	14
§ 3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	20
§ 4. Линейные уравнения первого порядка	23
§ 5. Уравнения в полных дифференциалах	28
§ 6. Теоремы существования и единственности решения уравнения $dy/dx = f(x, y)$	35
§ 7. Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка	58
§ 8. Простейшие типы уравнений, не разрешенных относительно производной	65
§ 9. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Особые решения	73
Задачи к главе 1	80
Глава 2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого . .	83
§ 1. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения n -го порядка	83
§ 2. Простейшие случаи понижения порядка	85
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка	91
§ 4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера	106

§ 5. Линейные неоднородные уравнения	113
§ 6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера	125
§ 7. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов	140
§ 8. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний	150
§ 9. Понятие о краевых задачах	163
Задачи к главе 2	170
Глава 3. Системы дифференциальных уравнений	174
§ 1. Общие понятия	174
§ 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка	178
§ 3. Нахождение интегрируемых комбинаций	184
§ 4. Системы линейных дифференциальных уравнений	188
§ 5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	200
§ 6. Приближенные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений и уравнений n -го порядка	206
Задачи к главе 3	209
Глава 4. Теория устойчивости	211
§ 1. Основные понятия	211
§ 2. Простейшие типы точек покоя	214
§ 3. Второй метод А. М. Ляпунова	223
§ 4. Исследование на устойчивость по первому приближению	230
§ 5. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена	236
§ 6. Случай малого коэффициента при производной высшего порядка	239
§ 7. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях	244
Задачи к главе 4	247
Глава 5. Уравнения в частных производных первого порядка	250
§ 1. Основные понятия	250
§ 2. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка	252
§ 3. Уравнения Пфаффа	266
§ 4. Нелинейные уравнения первого порядка	272
Задачи к главе 5	292
Ответы и указания к задачам	294
Рекомендуемая литература	300
Предметный указатель	301

ОТ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

В качестве третьего выпуска серии редакция приняла переиздание (с некоторыми изменениями) книг Л. Э. Эльсгольца по соответствующим разделам.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Третий выпуск «Курса высшей математики и математической физики» для физических и физико-математических факультетов содержит теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. В основу книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читал на физическом факультете Московского ордена Ленина государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Излагаемый материал хотя и близок к содержанию книг автора «Дифференциальные уравнения» (М., Гостехиздат, 1957) и «Вариационное исчисление» (М., Гостехиздат, 1958), однако по совету редакторов Курса в него внесен ряд изменений. За эти советы автор выражает им свою искреннюю признательность.

Л. Э. Эльсгольц

ЧАСТЬ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие физическое явление, но в то же время легко устанавливается зависимость между теми же величинами и их производными или дифференциалами. При этом мы получаем уравнения, содержащие неизвестные функции или вектор-функции под знаком производной или дифференциала.

Уравнения, в которых неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной или дифференциала, называются *дифференциальными уравнениями*. Приведем несколько примеров дифференциальных уравнений:

1) $\frac{dx}{dt} = -kx$ — уравнение радиоактивного распада (k — постоянная распада, x — количество неразложившегося вещества в момент времени t , скорость распада dx/dt пропорциональна количеству распадающегося вещества).

2) $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ — уравнение движения точки массы m под влиянием силы \mathbf{F} , зависящей от времени, положения точки, определяемого радиусом-вектором \mathbf{r} , и ее скорости $d\mathbf{r}/dt$. Сила равна произведению массы на ускорение.

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$ — уравнение Пуассона, которому, например, удовлетворяет потенциал $u(x, y, z)$ электростатического поля, $\rho(x, y, z)$ — плотность зарядов.

Зависимость между искомыми величинами будет найдена, если будут указаны методы нахождения неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями. Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции или вектор-функции являются функциями одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* (например, уравнения 1) и 2)). Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных* (например, уравнение 3)).

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Например, уравнение радиоактивного распада

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (\text{B.1})$$

имеет решение

$$x = ce^{-kt}, \quad (\text{B.1}_1)$$

где c — произвольная постоянная.

Очевидно, что дифференциальное уравнение (B.1) еще не полностью определяет закон распада $x = x(t)$. Для его полного определения надо знать количество распадающегося вещества x_0 в некоторый начальный момент t_0 . Если x_0 известно, то, принимая во внимание условие $x(t_0) = x_0$, из (B.1₁) находим закон радиоактивного распада:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В рассмотренном примере мы легко нашли точное решение, однако в более сложных случаях очень часто приходится применять приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Эти приближенные методы еще недавно приводили к утомительным вычислениям, но теперь быстродействующие вычислительные машины способны выполнять эту работу со скоростью в несколько десятков или даже сотен тысяч операций в секунду.

Рассмотрим несколько подробнее упомянутую выше более сложную задачу о нахождении закона движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ материальной точки массы m под действием заданной силы $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. По закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (\text{B.2})$$

Следовательно, задача сводится к интегрированию этого дифференциального уравнения. Очевидно, что закон движения еще не вполне определяется заданием массы m и силы \mathbf{F} , надо еще знать начальное положение точки

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad (\text{B.2}_1)$$

и начальную скорость

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0. \quad (\text{B.2}_2)$$

Укажем весьма естественный приближенный метод решения уравнения (B.2) с начальными условиями (B.2₁) и (B.2₂), причем идея этого метода может служить и для доказательства существования решения рассматриваемой задачи.

Разделим отрезок времени $t_0 \leq t \leq T$, на котором требуется определить решение уравнения (B.2), удовлетворяющее начальным условиям (B.2₁) и (B.2₂), на n равных частей длины $h = (T - t_0)/n$:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, T],$$

где

$$t_k = t_0 + kh \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

В пределах каждого из этих малых (при больших значениях n) отрезков времени сила $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ мало изменяется (вектор-функция \mathbf{F} предполагается непрерывной), поэтому приближенно ее можно считать на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ постоянной, например, равной ее значению в левой граничной точке каждого отрезка. Точнее, на отрезке $[t_0, t_1]$ сила $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ считается постоянной и равной $\mathbf{F}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$. При этом допущении из уравнения (B.2) и начальных условий (B.2₁) и (B.2₂) легко определяется закон движения $\mathbf{r}_n(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ (движение будет равномерно переменным) и, следовательно, в частности, известны значения $\mathbf{r}_n(t_1)$ и $\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$. Тем же методом приближенно определяем закон движения $\mathbf{r}_n(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, считая силу \mathbf{F} на этом участке постоянной и равной $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{r}_n(t_1), \dot{\mathbf{r}}_n(t_1))$. Продолжая этот процесс, определим приближенное решение $\mathbf{r}_n(t)$ поставленной задачи с начальными значениями для уравнения (B.2) на всем отрезке $[t_0, T]$.

Интуитивно ясно, что при $n \rightarrow \infty$ приближенное решение $\mathbf{r}_n(t)$ должно стремиться к точному решению.

Заметим, что векторное уравнение (B.2) второго порядка может быть заменено эквивалентной системой двух векторных уравнений первого порядка, если рассматривать скорость \mathbf{v} как вторую неизвестную вектор-функцию:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{B.3})$$

Каждое векторное уравнение в трехмерном пространстве может быть заменено путем проектирования на оси координат тремя скалярными уравнениями. Следовательно, уравнение (B.2) эквивалентно системе трех скалярных уравнений второго порядка, а система (B.3) эквивалентна системе шести скалярных уравнений первого порядка.

Наконец, можно одно векторное уравнение (B.2) второго порядка в трехмерном пространстве заменить одним векторным уравнением первого порядка в шестимерном пространстве, координатами в котором служат координаты r_x, r_y, r_z радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ и координаты v_x, v_y, v_z вектора-скорости \mathbf{v} . Такое пространство физики называют *фазовым*. Радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ в этом пространстве имеет координаты $(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$. В таких обозначениях система (B.3) имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \Phi(t, \mathbf{R}(t)) \quad (\text{B.4})$$

(проекциями вектора Φ в шестимерном пространстве служат соответствующие проекции правых частей системы (B.3) в трехмерном пространстве).

При такой интерпретации начальные условия (B.2₁) и (B.2₂) заменяются условием

$$\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0. \quad (\text{B.4}_1)$$

Решением уравнения (B.4) $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ будет фазовая траектория, каждой точке которой будет соответствовать некоторое мгновенное состояние движущейся точки — ее положение $\mathbf{r}(t)$ и ее скорость $\mathbf{v}(t)$.

Если к уравнению (B.4) с начальным условием (B.4₁) применить изложенный выше приближенный метод, то на первом отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функцию $\Phi(t, \mathbf{R}(t))$ надо считать постоянной и равной $\Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0))$. Итак, при $t_0 \leq t \leq t_0 + h$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0)),$$

откуда, умножая на dt и интегрируя в пределах от t_0 до t , получим линейную вектор-функцию $\mathbf{R}(t)$:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0) + \Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0))(t - t_0).$$

В частности, при $t = t_1$ будем иметь

$$\mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}(t_0) + h\Phi(t_0, \mathbf{R}(t_0)).$$

прикладного значения, так как оно даже приближенно не описывает движение рассматриваемого тела. Следовательно, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых малое изменение начальных значений \mathbf{r}_0 и $\dot{\mathbf{r}}_0$ вызывает лишь малое изменение определяемого ими решения $\mathbf{r}(t)$.

Аналогичный вопрос возникает и в задачах, в которых требуется выяснить, с какой точностью надо задавать начальные значения \mathbf{r}_0 и $\dot{\mathbf{r}}_0$, чтобы движущаяся точка с заданной точностью вышла на требуемую траекторию или попала бы в данную область.

Столь же большое значение имеет вопрос о влиянии на решение малых слагаемых в правой части уравнения (В.2) — малых, но постоянно действующих сил.

В некоторых случаях эти малые силы, действующие в течение большого промежутка времени, способны сильно исказить решение и ими нельзя пренебречь. В других случаях изменение решения под действием этих сил незначительно, и если оно не превосходит требуемой точности вычисления, то малыми возмущающими силами можно пренебречь.

Ниже излагаются методы интегрирования дифференциальных уравнений и простейшие способы исследования их решений.

Г Л А В А 1

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

**§ 1. Уравнения первого порядка,
разрешенные относительно производной**

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка первой степени можно, разрешив относительно производной, представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Простейший пример такого уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

рассматривается в курсе интегрального исчисления. В этом простейшем случае решение

$$y = \int f(x) dx + c$$

содержит произвольную постоянную, которая может быть определена, если известно значение $y(x_0) = y_0$, тогда

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

В дальнейшем будет доказано, что при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию $f(x, y)$, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

также имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, а его *общее решение*, т. е. множество решений, содержащее все без исключения решения, зависит от одной произвольной постоянной.

Дифференциальное уравнение $dy/dx = f(x, y)$ устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной dy/dx к графику решения в той же точке. Зная x и y , можно вычислить dy/dx . Следовательно, дифференциальное уравнение рассматриваемого вида определяет поле направлений (рис. 1.1) и задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые *интегральными кривыми*, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

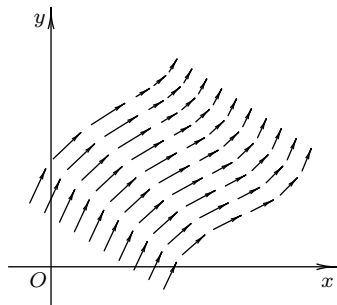


Рис. 1.1.

В каждой точке, отличной от точки $(0, 0)$, угловый коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению y/x , т. е. совпадает с угловым коэффициентом прямой, направленной из начала координат в ту же

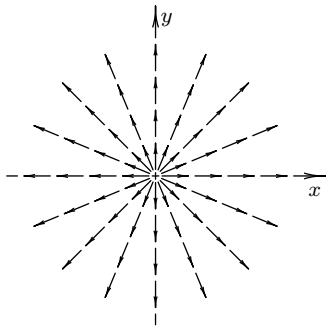


Рис. 1.2.

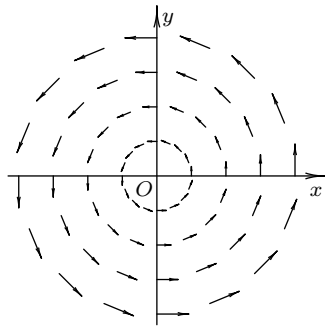


Рис. 1.3.

точку (x, y) . На рис. 1.2 стрелками изображено поле направлений, определяемое рассматриваемым уравнением. Очевидно, что интегральными кривыми в данном случае будут прямые $y = sx$, так как направления этих прямых всюду совпадают с направлением поля.

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Замечаем, что угловой коэффициент касательной к искомым интегральным кривым $-(x/y)$ и угловой коэффициент касательной (y/x) к интегральным кривым примера 1 в каждой точке удовлетворяют условию ортогональности: $-(x/y) \cdot (y/x) = -1$. Следовательно, поле направлений, определяемое рассматриваемым дифференциальным уравнением, ортогонально полю направлений, изображенному на рис. 1.2. Очевидно, что интегральными кривыми уравнения $dy/dx = -x/y$ являются окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = c^2$ (рис. 1.3) (точнее, полуокружности $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$).

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для построения поля направлений найдем геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются *изоклинами*. Уравнение изоклин получим, считая $dy/dx = k$, где k — постоянная; $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ или $x^2 + y^2 = k^2$.

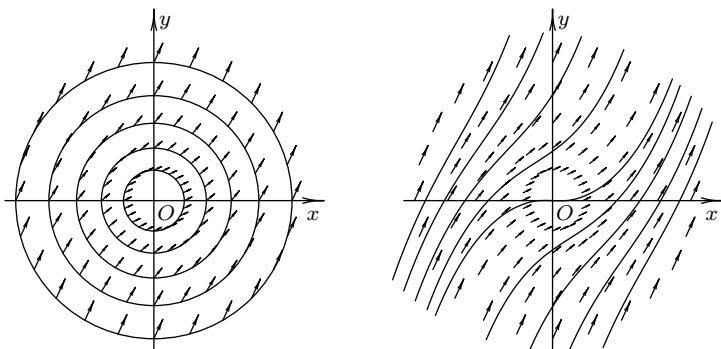


Рис. 1.4.

Следовательно, в данном случае изоклинами являются окружности с центром в начале координат, причем угловой коэффициент касательной к искомым интегральным кривым равен радиусу этих окружностей. Для построения поля направлений дадим постоянной k некоторые определенные значения (см. рис. 1.4 слева). Теперь можно уже приближенно провести искомые интегральные кривые (см. рис. 1.4 справа).

Пример 4.

$$y' = 1 + xy.$$

Изоклинами являются гиперболы $k = xy + 1$ или $xy = k - 1$, причем при $k = 1$ гипербола распадается на пару прямых $x = 0$ и $y = 0$ (рис. 1.5). При $k = 0$ получаем изоклину $1 + xy = 0$; эта гипербола разбивает плоскость на части, в каждой из которых y' сохраняет постоянный знак (рис. 1.6). Интегральные кривые $y = y(x)$, пересекая гиперболу $1 + xy = 0$, переходят из области

возрастания функции $y(x)$ в области ее убывания или, наоборот, из области убывания в область возрастания, и следовательно, на ветвях этой гиперболы

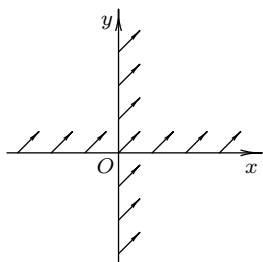


Рис. 1.5.

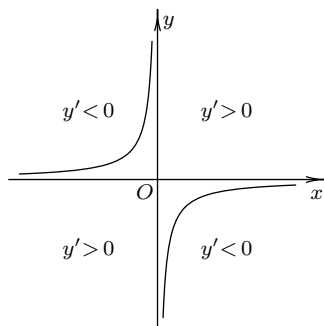


Рис. 1.6.

расположены точки максимума и минимума интегральных кривых.

Определим теперь знаки второй производной в различных областях плоскости:

$$y'' = xy' + y \quad \text{или} \quad y'' = x(1 + xy) + y = x + (x^2 + 1)y.$$

Кривая $x + (x^2 + 1)y = 0$ или

$$y = -\frac{x}{1 + x^2} \tag{1.1}$$

(рис. 1.7) разбивает плоскость на две части, в одной из которых $y'' < 0$, и следовательно, интегральные кривые выпуклы вверх, а в другой $y'' > 0$, и значит, интегральные кривые вогнуты вверх. При переходе через кривую (1.1) интегральные кривые переходят от выпуклости к вогнутости, и следовательно, на этой кривой расположены точки перегиба интегральных кривых.

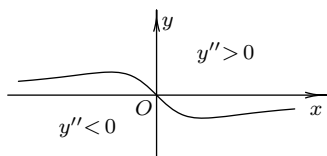


Рис. 1.7.

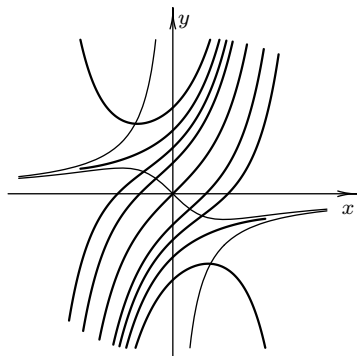


Рис. 1.8.

В результате проведенного исследования известны области возрастания и убывания интегральных кривых, известно расположение точек максимума и минимума, известны области выпуклости и вогнутости и расположение

точек перегиба, известна изоклина $k = 1$. Этих сведений вполне достаточно для того, чтобы сделать набросок расположения интегральных кривых (рис. 1.8), но можно было бы вычертить еще несколько изоклин, что позволило бы уточнить расположение интегральных кривых.

Во многих задачах, в частности почти во всех задачах геометрического характера, переменные x и y совершенно равноправны. Поэтому в таких задачах, если они сводятся к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.2)$$

естественно наряду с уравнением (1.2) рассматривать также уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (1.3)$$

Если оба эти уравнения имеют смысл, то они эквивалентны, так как если функция $y = y(x)$ является решением уравнения (1.2), то обратная функция $x = x(y)$ является решением уравнения (1.3), и следовательно, уравнения (1.2) и (1.3) имеют общие интегральные кривые.

Если же в некоторых точках одно из уравнений (1.2) или (1.3) теряет смысл, то в таких точках естественно его заменять другим из этих уравнений.

Например, уравнение $dy/dx = y/x$ теряет смысл при $x = 0$. Заменив его уравнением $dx/dy = x/y$, правая часть которого уже не теряет смысла при $x = 0$, находим в дополнение к ранее найденным решениям $y = cx$ (см. стр. 11) еще одну интегральную кривую $x = 0$ этого уравнения.

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y) dy = f_1(x) dx \quad (1.4)$$

называются *уравнениями с разделенными переменными*. Функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ будем считать непрерывными.

Предположим, что $y(x)$ является решением этого уравнения, тогда при подстановке $y(x)$ в уравнение (1.4) получим тождество, интегрируя которое, будем иметь:

$$\int f_2(y) dy = \int f_1(x) dx + c, \quad (1.5)$$

где c — произвольная постоянная.

Мы получили конечное уравнение (1.5), которому удовлетворяют все решения уравнения (1.4), причем каждое решение уравнения (1.5) является решением уравнения (1.4), так как если некоторая функция $y(x)$ при подстановке обращает уравнение (1.5) в тождество, то, дифференцируя это тождество, обнаружим, что $y(x)$ удовлетворяет и уравнению (1.4).

Конечное уравнение $\Phi(x, y) = 0$, которое определяет решение $y(x)$ дифференциального уравнения как неявную функцию x , называется *интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения.

Если это конечное уравнение определяет все без исключения решения данного дифференциального уравнения, то оно называется *общим интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения. Следовательно, уравнение (1.5) является общим интегралом уравнения (1.4). Для того чтобы уравнение (1.5) определяло y как неявную функцию x , достаточно потребовать, чтобы $f_2(y) \neq 0$.

Вполне возможно, что в некоторых задачах неопределенные интегралы $\int f_1(x) dx$ и $\int f_2(y) dy$ нельзя будет выразить в элементарных функциях, тем не менее мы и в этом случае будем считать задачу интегрирования дифференциального уравнения (1.4) выполненной в том смысле, что мы свели ее к более простой и уже изученной в курсе интегрального исчисления задаче вычисления неопределенных интегралов — квадратур¹⁾.

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, то оно, очевидно, определится из уравнения

$$\int_{y_0}^y f_2(y) dy = \int_{x_0}^x f_1(x) dx,$$

которое получим из

$$\int_{y_0}^y f_2(y) dy = \int_{x_0}^x f_1(x) dx + c,$$

воспользовавшись начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пример 1.

$$x dx + y dy = 0.$$

¹⁾ Так как термин «интеграл» в теории дифференциальных уравнений часто применяется в смысле интеграла дифференциального уравнения, то во избежание недоразумений для интегралов функций $\int f(x) dx$ обычно применяется термин «квadrатура».

Переменные разделены, так как коэффициент при dx является функцией только x , а коэффициент при dy является функцией только y . Интегрируя, получим

$$\int x dx + \int y dy = c \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = c_1^2$$

— семейство окружностей с центром в начале координат (сравните с примером 2 [§ 1 стр. 11]).

Пример 2.

$$e^{x^2} dx = \frac{dy}{\ln y}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int e^{x^2} dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

Интегралы $\int e^{x^2} dx$ и $\int (dy/\ln y)$ не берутся в элементарных функциях, тем не менее исходное уравнение считается проинтегрированным, так как задача доведена до квадратур.

Уравнения вида

$$\varphi_1(x)\psi_1(y) dx = \varphi_2(x)\psi_2(y) dy,$$

в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y , называются дифференциальными *уравнениями с разделяющимися переменными*, так как путем деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} dy.$$

Заметим, что деление на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $\psi_1(y) \cdot \varphi_2(x)$, а если функции $\psi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений, обращающих в нуль множитель

$$\frac{1}{\psi_1(y)\varphi_2(x)}.$$

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (\text{сравните с примером 1 [§ 1 стр. 11]}).$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln c, \quad c > 0.$$

Потенцируя, получим $|y| = c|x|$. Если речь идет только о гладких решениях, то уравнение $|y| = c|x|$, где $c > 0$, эквивалентно уравнению $y = \pm cx$ или $y = c_1x$, где c_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но $c_1 \neq 0$. Если же принять во внимание, что при делении на y мы потеряли решение $y = 0$, то можно считать, что в решении $y = c_1x$ постоянная c_1 принимает и значение $c_1 = 0$, при котором мы получаем потерянное ранее решение $y = 0$.

З а м е ч а н и е. Если в примере 3 считать переменные x и y равноправными, то уравнение $dy/dx = y/x$, теряющее смысл при $x = 0$, надо дополнить уравнением $dx/dy = x/y$ (см. стр. 14), которое, очевидно, имеет еще решение $x = 0$, не содержащееся в найденном выше решении $y = c_1x$.

Пример 4.

$$x(1 + y^2) dx - y(1 + x^2) dy = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{y dy}{1 + y^2} = \frac{x dx}{1 + x^2}; \quad \int \frac{y dy}{1 + y^2} = \int \frac{x dx}{1 + x^2} + c;$$

$$\ln(1 + y^2) = \ln(1 + x^2) + \ln c_1; \quad 1 + y^2 = c_1(1 + x^2).$$

Пример 5.

$$\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}.$$

Найти решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(1) = 1$.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^t 2t dt, \quad \sqrt{x} = t^2, \quad x = t^4.$$

Пример 6. Как уже упоминалось во введении, установлено, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству x еще не распавшегося вещества. Найти зависимость x от времени t , если в начальный момент при $t = t_0$ будет $x = x_0$.

Коэффициент пропорциональности k , называемый постоянной распада, предполагается известным. Дифференциальное уравнение процесса будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{1.6}$$

(знак $-$ указывает на уменьшение x при возрастании t , $k > 0$). Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x} = -k dt; \quad \ln|x| - \ln|x_0| = -k(t - t_0),$$

откуда

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Определим еще период полураспада τ (т.е. время, в течение которого распадается $\frac{1}{2}x_0$). Полагая $t - t_0 = \tau$, получим $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k\tau}$, откуда $\tau = (\ln 2)/k$.

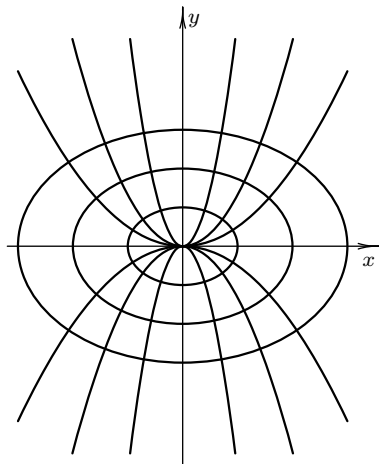


Рис. 1.9.

Не только радиоактивный распад, но и любая другая мономолекулярная реакция на основании закона действующих масс описывается уравнением $dx/dt = -kx$, где x — количество еще не прореагировавшего вещества.

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0, \quad (1.7)$$

отличающееся лишь знаком правой части от уравнения (1.6), описывает многие процессы «размножения», например «размножение» числа нейтронов в цепных ядерных реакциях или размножение числа бактерий в предположении, что условия среды для них предельно благоприятны и поэтому скорость их размно-

жения пропорциональна наличному числу бактерий.

Решение уравнения (1.7), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, имеет вид $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$ и, в отличие от решений уравнения (1.6), $x(t)$ не убывает, а возрастает по показательному закону с возрастанием t .

Пример 7.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\rho - 2)(\rho - 4).$$

Начертить интегральные кривые, не интегрируя уравнения; ρ и φ — полярные координаты.

Уравнение имеет очевидные решения $\rho = 0$, $\rho = 2$ и $\rho = 4$. При $0 < \rho < 2$ $d\rho/d\varphi > 0$; при $2 < \rho < 4$ $d\rho/d\varphi < 0$ и при $\rho > 4$ $d\rho/d\varphi > 0$.

Следовательно, интегральными кривыми являются окружности $\rho = 2$ и $\rho = 4$ и спирали, наматывающиеся при возрастании φ на окружность $\rho = 2$ и разматывающиеся с возрастанием φ с окружности $\rho = 4$. Замкнутые интегральные кривые, в достаточно малых окрестностях которых интегральными кривыми являются спирали, называются *предельными циклами*. В данном примере окружности $\rho = 2$ и $\rho = 4$ являются предельными циклами.

Пример 8. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y = ax^2$.

Ортогональными траекториями заданного семейства кривых называются линии, пересекающие под прямым углом линии данного семейства.

Угловые коэффициенты y'_1 и y'_2 касательных к кривым данного семейства и к искомым ортогональным траекториям должны в каждой точке удовлетворять условию ортогональности $y'_2 = -1/y'_1$. Для семейства парабол $y = ax^2$ находим $y' = 2ax$, или так как $a = y/x^2$, то $y' = 2y/x$. Следовательно, дифференциальное уравнение искомым ортогональных траекторий имеет вид $y' = -x/(2y)$.

Разделяя переменные, находим $2y dy + x dx = 0$ и, интегрируя, получим семейство эллипсов

$$x^2/2 + y^2 = c^2$$

(рис. 1.9).

Пример 9. Пусть $u = xy$ — потенциал скоростей плоскопараллельного течения жидкости. Найти уравнение линий тока.

Линии тока являются ортогональными траекториями семейства эквипотенциальных линий $xy = c$. Находим угловой коэффициент касательной к эквипотенциальным линиям: $xy' + y = 0$, $y' = -y/x$. Следовательно, дифференциальное уравнение линий тока имеет вид $y' = x/y$ или $y dy = x dx$; интегрируя, получаем $x^2 - y^2 = c$ — семейство гипербол.

Пример 10. Полый однородный металлический шар, имеющий внутренний радиус r_1 , а внешний r_2 , находится в стационарном тепловом состоянии, причем температура на его внутренней поверхности равна T_1 , а на наружной T_2 . Найти температуру T на расстоянии r от центра шара, $r_1 \leq r \leq r_2$.

Из соображений симметрии следует, что T является функцией только r .

Так как между двумя концентрическими сферами с центрами в центре шара (их радиусы могут изменяться от r_1 до r_2) количество тепла остается неизменным, то через каждую сферу протекает одно и то же количество тепла Q . Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс, имеет вид

$$-4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = Q,$$

где k — коэффициент теплопроводности.

Разделяя переменные и интегрируя, получим искомую зависимость T от r :

$$\begin{aligned} 4\pi k dT &= -\frac{Q dr}{r^2}; \\ 4\pi k \int_{T_1}^T dT &= -Q \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2}, \\ 4\pi k(T - T_1) &= Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right). \end{aligned}$$

Для определения Q используем условие: при $r = r_2$, $T = T_2$

$$Q = \frac{4\pi k(T_2 - T_1)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} = \frac{4\pi k(T_2 - T_1)r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

§ 3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными. К числу таких уравнений относятся, например, уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

где a и b — постоянные величины, которые заменой переменных $z = ax + by$ преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными. Действительно, переходя к новым переменным x и z , будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

или

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

и переменные разделились. Интегрируя, получим

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + c.$$

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Полагая $z = 2x + y$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2, \quad \frac{dz}{dx} - 2 = z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z+2} &= dx, \quad \ln|z+2| = x + \ln c, \quad z = -2 + ce^x, \\ 2x + y &= -2 + ce^x, \quad y = ce^x - 2x - 2. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

Полагая $x - y = z$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 - \frac{dz}{dx}, \quad 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1; \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{1}{z}, \quad z \, dz = -dx, \quad z^2 = -2x + c, \quad (x-y)^2 = -2x + c. \end{aligned}$$

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые *однородные дифференциальные уравнения первого порядка*, имеющие вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Действительно, после подстановки $z = y/x$ или $y = xz$ получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x \frac{dz}{dx} + z, \quad x \frac{dz}{dx} + z = f(z), \quad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{dz}{f(z) - z} &= \ln|x| + \ln c, \quad x = ce^{\int \frac{dz}{f(z) - z}}. \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть однородного уравнения является однородной функцией переменных x и y нулевой степени однородности, поэтому уравнение вида

$$M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0$$

будет однородным, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями x и y одинаковой степени однородности, так как в этом случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Полагая $y = xz$, $dy/dx = x \, dz/dx + z$ и подставляя в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned} x \frac{dz}{dx} + z &= z + \operatorname{tg} z, \quad \frac{\cos z \, dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}, \\ \ln |\sin z| &= \ln|x| + \ln c, \quad \sin z = cx, \quad \sin \frac{y}{x} = cx. \end{aligned}$$

Пример 4.

$$(x + y) dx - (y - x) dy = 0.$$

Полагая $y = xz$, $dy = x dz + z dx$, получим

$$\begin{aligned} (x + xz) dx - (xz - x)(x dz + z dx) &= 0, \quad (1 + 2z - z^2) dx + x(1 - z) dz = 0, \\ \frac{(1 - z) dz}{1 + 2z - z^2} + \frac{dx}{x} &= 0, \quad \frac{1}{2} \ln |1 + 2z - z^2| + \ln |x| = \frac{1}{2} \ln c, \\ x^2(1 + 2z - z^2) &= c, \quad x^2 + 2xy - y^2 = c. \end{aligned}$$

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right) \quad (1.8)$$

преобразуются в однородные уравнения путем переноса начала координат в точку пересечения (x_1, y_1) прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Действительно, свободный член в уравнениях этих прямых в новых координатах $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$ будет равен нулю, коэффициенты при текущих координатах остаются неизменными, а $dy/dx = dY/dX$, и уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$\frac{dY}{dX} = f \left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \right)$$

или

$$\frac{dY}{dX} = f \left(\frac{a_1 + b_1 \cdot Y/X}{a_2 + b_2 \cdot Y/X} \right) = \varphi \left(\frac{Y}{X} \right)$$

и является уже однородным уравнением.

Этот метод нельзя применить лишь в случае параллельности прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Но в этом случае коэффициенты при текущих координатах пропорциональны $a_2/a_1 = b_2/b_1 = k$, и уравнение (1.8) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2} \right) = F(a_1x + b_1y),$$

и следовательно, как указано на стр. 20, замена переменных $z = a_1x + b_1y$ преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решая систему уравнений $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$, получим $x_1 = 1$, $y_1 = 2$. Полагая $x = X + 1$, $y = Y + 2$, будем иметь

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Замена переменных $z = Y/X$ или $Y = zX$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} z + X \frac{dz}{dX} &= \frac{1 - z}{1 + z}, \quad \frac{(1 + z) dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{dX}{X}, \\ -\frac{1}{2} \ln |1 - 2z - z^2| &= \ln |X| - \frac{1}{2} \ln c, \\ (1 - 2z - z^2)X^2 &= c, \quad X^2 - 2XY - Y^2 = c, \\ x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y &= c_1. \end{aligned}$$

§ 4. Лине́йные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad (1.9)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ в дальнейшем будем считать непрерывными функциями x в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение (1.9).

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1.9) называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{y} = -p(x) dx,$$

и, интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \ln |y| &= - \int p(x) dx + \ln c_1, \quad c_1 > 0, \\ y &= ce^{-\int p(x) dx}, \quad c \neq 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При делении на y мы потеряли решение $y \equiv 0$, однако оно может быть включено в найденное семейство решений (1.10), если считать, что c может принимать и значение 0.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения (1.9) может быть применен так называемый *метод вариации постоянной*. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее (т. е. имеющее ту же левую часть) однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

общее решение которого, как указано выше, имеет вид

$$y = ce^{-\int p(x) dx}.$$

При постоянном c функция $ce^{-\int p(x) dx}$ является решением однородного уравнения. Попробуем теперь удовлетворить неоднородному уравнению, считая c функцией x , т. е. по существу совершая замену переменных

$$y = c(x)e^{-\int p(x) dx},$$

где $c(x)$ — новая неизвестная функция x .

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} e^{-\int p(x) dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x) dx}$$

и подставляя в исходное неоднородное уравнение (1.9), получим

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int p(x) dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x) dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x) dx} = f(x)$$

или

$$\frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x) dx},$$

откуда, интегрируя, находим

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx + c_1,$$

а следовательно,

$$y = c(x)e^{-\int p(x) dx} = c_1 e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx. \quad (1.11)$$

Итак, общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$c_1 e^{-\int p(x) dx}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx,$$

получающегося из (1.11) при $c_1 = 0$.

Заметим, что в конкретных примерах нецелесообразно пользоваться громоздкой и трудно запоминаемой формулой (1.11), значительно легче каждый раз повторять все приведенные выше вычисления.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln |y| = \ln |x| + \ln c, \quad y = cx.$$

Считаем c функцией x , тогда $y = c(x)x$, $dy/dx = (dc/dx)x + c(x)$ и, подставляя в исходное уравнение, после упрощения получаем

$$\frac{dc}{dx} x = x^2 \quad \text{или} \quad dc = x dx, \quad c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Следовательно, общее решение

$$y = c_1 x + \frac{x^3}{2}.$$

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx, \\ \ln |y| = \ln |\sin x| + \ln c, \quad y = c \sin x.$$

Варьируем постоянную

$$y = c(x) \sin x, \quad y' = c'(x) \sin x + c(x) \cos x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$c'(x) \sin x + c(x) \cos x - c(x) \cos x = 2x \sin x, \\ c'(x) = 2x, \quad c(x) = x^2 + c_1, \\ y = x^2 \sin x + c_1 \sin x.$$

Пример 3. В электрической цепи с самоиндукцией происходит процесс установления переменного тока. Напряжение U является заданной функцией времени $U = U(t)$, сопротивление R и самоиндукция L постоянны, начальная сила тока $I(0) = I_0$ задана. Найти зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени.

Пользуясь законом Ома для цепи с самоиндукцией, получим

$$U - L \frac{dI}{dt} = RI.$$

Решение этого линейного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $I(0) = I_0$, согласно (1.11) имеет вид

$$I = e^{-(R/L)t} \left[I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t U(t) e^{(R/L)t} dt \right]. \quad (1.12)$$

При постоянном напряжении $U = U_0$ получим

$$I = \frac{U_0}{R} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-(R/L)t}.$$

Интересен случай синусоидального переменного напряжения $U = (A \times \sin \omega t)$. При этом согласно (1.12) получим

$$I = e^{-(R/L)t} \left(I_0 + \frac{A}{L} \int_0^t e^{(R/L)t} \sin \omega t dt \right).$$

Стоящий в правой части интеграл легко вычисляется.

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. Например, *уравнение Бернулли*, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1,$$

или

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x), \quad (1.13)$$

заменой переменных $y^{1-n} = z$ сводится к линейному уравнению. Действительно, дифференцируя $y^{1-n} = z$, находим $(1-n)y^{-n}dy/dx = dz/dx$ и, подставляя в (1.13), получим линейное уравнение

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Пример 4.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}, \\ 2y \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{x} + x^2, \quad y^2 = z, \quad 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{z}{x} + x^2\end{aligned}$$

и далее, как в примере 1 [стр. 25].

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x),$$

называемое *уравнением Риккати*, в общем виде не интегрируется в квадратурах, но может быть заменой переменных преобразовано в уравнение Бернулли, если известно одно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения. Действительно, полагая $y = y_1 + z$, получим

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

или, так как $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 \equiv f(x)$, будем иметь уравнение Бернулли

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^2 = 0.$$

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}.$$

В этом примере нетрудно подобрать частное решение $y_1 = 1/x$. Полагая $y = z + 1/x$, получим $y' = z' - 1/x^2$, $z' - 1/x^2 = (z + 1/x)^2 - 2/x^2$, или $z' = z^2 + 2z/x$ — уравнение Бернулли.

$$\begin{aligned}\frac{z'}{z^2} &= \frac{2}{xz} + 1, \quad u = \frac{1}{z}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{z'}{z^2}, \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{2u}{x} - 1, \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}, \\ \ln |u| &= -2 \ln |x| + \ln c, \quad u = \frac{c}{x^2}, \quad u = \frac{c(x)}{x^2}, \\ \frac{c'(x)}{x^2} &= -1, \quad c(x) = -\frac{x^3}{3} + c_1, \\ u &= \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{z} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{y - \frac{1}{x}} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \\ y &= \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_2 - x^3}.\end{aligned}$$

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах

Может случиться, что левая часть дифференциального уравнения

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1.14)$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$:

$$du(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

и, следовательно, уравнение (1.14) принимает вид

$$du(x, y) = 0.$$

Если функция $y(x)$ является решением уравнения (1.14), то

$$du(x, y(x)) \equiv 0,$$

и, следовательно,

$$u(x, y(x)) = c, \quad (1.15)$$

где c — постоянная, и наоборот, если некоторая функция $y(x)$ обращает в тождество конечное уравнение (1.15), то, дифференцируя полученное тождество, получим $du(x, y(x)) = 0$, и следовательно, $u(x, y) = c$, где c произвольная постоянная, является общим интегралом исходного уравнения.

Если даны начальные значения $y(x_0) = y_0$, то постоянная c определяется из (1.15) $c = u(x_0, y_0)$ и

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (1.15_1)$$

является искомым частным интегралом. Если $\partial u / \partial y = N(x, y) \neq 0$ в точке (x_0, y_0) , то уравнение (1.15₁) определяет y как неявную функцию x .

Для того, чтобы левая часть уравнения (1.14)

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

являлась полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1.16)$$

Если это условие, впервые указанное Эйлером, выполнено, то уравнение (1.14) легко интегрируется. Действительно,

$$du = M dx + N dy.$$

С другой стороны,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y),$$

откуда

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + c(y).$$

При вычислении интеграла $\int M(x, y) dx$ величина y рассматривается как постоянная, поэтому $c(y)$ является произвольной функцией y .

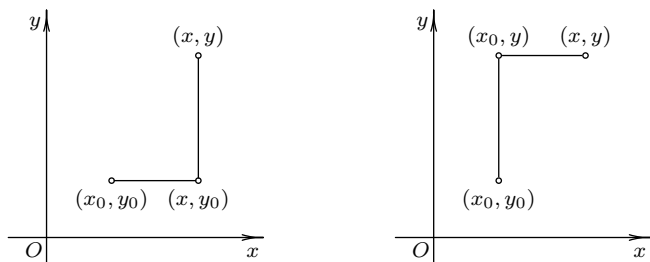


Рис. 1.10.

Для определения функции $c(y)$ дифференцируем найденную функцию $u(x, y)$ по y и, так как $\partial u / \partial y = N(x, y)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + c'(y) = N(x, y).$$

Из этого уравнения определяем $c'(y)$ и, интегрируя, находим $c(y)$.

Как известно из курса математического анализа, еще проще можно определить функцию $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу $du = M(x, y) dx + N(x, y) dy$, взяв криволинейный интеграл от $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ между некоторой фиксированной точкой (x_0, y_0) и точкой с переменными координатами (x, y) по любому пути:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Чаще всего в качестве пути интегрирования удобно брать ломаную, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат (рис. 1.10); в этом случае

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M dx + N dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} M dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} N dy$$

или

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M dx + N dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y)} N dy + \int_{(x_0, y)}^{(x, y)} M dx.$$

Пример 1.

$$(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0.$$

Левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x + y + 1)}{\partial y} &\equiv \frac{\partial(x - y^2 + 3)}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= x + y + 1, \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x + c(y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x + c'(y), \quad x + c'(y) = x - y^2 + 3, \\ c'(y) &= -y^2 + 3, \quad c(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c_1, \\ u &= \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1. \end{aligned}$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = c_2. \quad (1.17)$$

Можно применить и другой метод определения функции $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy.$$

За начальную точку (x_0, y_0) выбираем, например, начало координат, в качестве пути интегрирования — изображенную на рис. 1.11 ломаную. Тогда

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} (x + 1) dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x - y^2 + 3) dy = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

и общий интеграл имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = c$$

или как в (1.17).

В некоторых случаях, когда левая часть уравнения

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1.14)$$

не является полным дифференциалом, легко удастся подобрать функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (1.14) превращается в полный дифференциал

$$du = \mu M dx + \mu N dy.$$

Такая функция μ называется *интегрирующим множителем*. Заметим, что умножение на интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ может привести к появлению лишних частных решений, обращающих этот множитель в нуль.

Пример 2.

$$x dx + y dy + (x^2 + y^2)x^2 dx = 0.$$

Очевидно, что после умножения на множитель $\mu = 1/(x^2 + y^2)$ левая часть превращается в полный дифференциал. Действительно, после умножения на $\mu = 1/(x^2 + y^2)$ получим

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + x^2 dx = 0$$

или, интегрируя, $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + x^3/3 = \ln c_1$.
Умножая на 2 и потенцируя, будем иметь

$$(x^2 + y^2)e^{2/3x^3} = c.$$

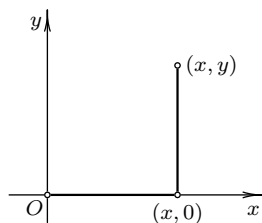


Рис. 1.11.

Конечно, далеко не всегда интегрирующий множитель подбирается столь легко. В общем случае для нахождения интегрирующего множителя надо подобрать хотя бы одно не равное тождественно нулю частное решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu,$$

которое после деления на μ и переноса некоторых членов в другую часть равенства приводится к виду

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (1.18)$$

В общем случае интегрирование этого уравнения в частных производных является задачей отнюдь не более простой, чем интегрирование исходного уравнения, однако в некоторых случаях подбор частного решения уравнения (1.18) не представляет затруднений.

Кроме того, считая, что интегрирующий множитель является функцией только одного аргумента (например, является функцией только $x + y$ или только $x^2 + y^2$, или функцией только x , или только y и т. д.), можно уже без труда проинтегрировать уравнение (1.18) и указать условия, при которых интегрирующий множитель рассматриваемого вида существует. Тем самым выделяются классы уравнений, для которых интегрирующий множитель легко может быть найден.

Например, найдем условия, при которых уравнение $M dx + N dy = 0$ имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x , $\mu = \mu(x)$. При этом уравнение (1.18) упрощается и приобретает вид

$$-\frac{d \ln \mu}{dx} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

откуда, считая $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) / N$ непрерывной функцией x , получим

$$\begin{aligned} \ln \mu &= \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + \ln c, \\ \mu &= ce^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Можно считать $c = 1$, так как достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель.

Если $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) / N$ является функцией только x , то интегрирующий множитель, зависящий лишь от x , существует и равен (1.19), в противном случае интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ не существует.

Условие существования интегрирующего множителя, зависящего только от x , выполнено, например, для линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad \text{или} \quad [p(x)y - f(x)] dx + dy = 0.$$

Действительно, $(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) / N = p(x)$ и, следовательно, $\mu = e^{\int p(x) dx}$. Совершенно аналогично могут быть найдены условия существования интегрирующих множителей вида

$$\mu(y), \quad \mu(x \pm y), \quad \mu(x^2 \pm y^2), \quad \mu(x \cdot y), \quad \mu\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Пример 3. Имеет ли уравнение

$$x dx + y dy + x dy - y dx = 0 \tag{1.20}$$

интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x^2 + y^2)$?

Обозначим $x^2 + y^2 = z$. Уравнение (1.18) при $\mu = \mu(x^2 + y^2) = \mu(z)$ принимает вид

$$2(My - Nx) \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

откуда

$$\ln |\mu| = \frac{1}{2} \int \varphi(z) dz + \ln c$$

или

$$\mu = ce^{\frac{1}{2} \int \varphi(z) dz}, \tag{1.21}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}.$$

Для существования интегрирующего множителя заданного вида необходимо и в предположении непрерывности $\varphi(z)$ достаточно, чтобы $(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) / (My - Nx)$ была функцией только $x^2 + y^2$. В данном случае

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx} = -\frac{2}{x^2 + y^2},$$

следовательно, интегрирующий множитель $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ существует и равен (1.21). При $c = 1$ получим

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Умножая уравнение (1.20) на $\mu = 1/(x^2 + y^2)$, приведем его к виду

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{d(y/x)}{1 + (y/x)^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + d \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln c,$$

и после потенцирования будем иметь

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

или в полярных координатах $\rho = ce^{-\varphi}$ — семейство логарифмических спиралей.

Пример 4. Найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из заданной точки.

Поместим начало координат в заданную точку и направим ось абсцисс параллельно заданному в условиях задачи направлению. Пусть луч падает на зеркало в точке $M(x, y)$. Рассмотрим изображенное на рис. 1.12 сечение зеркала плоскостью Oxy , проходящее через ось абсцисс и точку M . Проведем касательную MN к рассматриваемому сечению поверхности зеркала в точке $M(x, y)$. Так как угол падения луча равен углу отражения, то треугольник MNO равнобедренный. Следовательно,

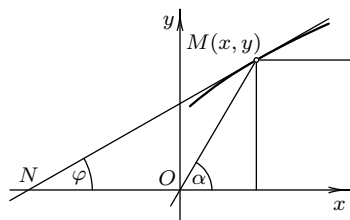


Рис. 1.12.

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Полученное однородное уравнение легко интегрируется заменой переменных

$$\frac{x}{y} = z,$$

но еще проще, освободившись от иррациональности в знаменателе, переписать его в виде

$$x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Уравнение имеет очевидный интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + c, \quad y^2 = 2cx + c^2$$

(семейство парабол).

Замечание. Эта задача еще проще решается в координатах x и ρ , где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, при этом уравнение сечения искомых поверхностей приобретает вид

$$dx = d\rho, \quad \rho = x + c.$$

Можно доказать существование интегрирующего множителя, или, что то же самое, существование ненулевого решения уравнения в частных производных (1.18) [стр. 32] в некоторой области, если функции M и N имеют непрерывные производные и по крайней мере одна из этих функций не обращается в нуль. Следовательно, метод интегрирующего множителя можно рассматривать как общий метод интегрирования уравнений вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

однако ввиду трудности нахождения интегрирующего множителя этот метод чаще всего применяется лишь в тех случаях, когда интегрирующий множитель очевиден.

§ 6. Теоремы существования и единственности решения уравнения $dy/dx = f(x, y)$

Класс интегрирующихся в квадратурах дифференциальных уравнений весьма узок, поэтому уже со времени Эйлера приближенные методы в теории дифференциальных уравнений приобрели большое значение.

В настоящее время в связи с быстрым развитием вычислительной техники приближенные методы приобретают еще несравненно большее значение.

Теперь часто целесообразно применять приближенные методы даже в тех случаях, когда уравнение интегрируется в квадратурах. Более того, если даже решение может быть несложно выражено в элементарных функциях, то нередко использование таблиц этих функций оказывается более трудоемким, чем приближенное интегрирование уравнения на быстродействующей машине. Однако, для того чтобы применять тот или иной метод приближенного интегрирования дифференциального уравнения, надо прежде всего быть уверенным в существовании искомого решения, а также и в единственности решения, так как при отсутствии единственности остается неясным, какое именно решение требуется приближенно определить.

Чаще всего доказательство теорем существования решения одновременно дает и метод точного или приближенного нахождения решения, что еще более увеличивает значение теорем существования.

Например, доказываемая ниже теорема 1.1 дает обоснование *метода Эйлера* приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, который заключается в том, что искомая интегральная кривая дифференциального уравнения $dy/dx = f(x, y)$, проходящая че-

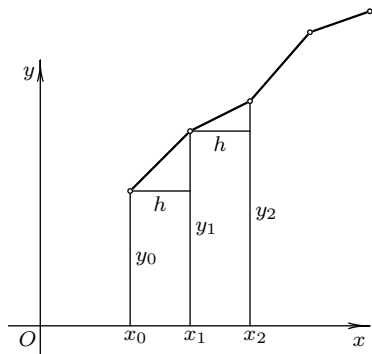


Рис. 1.13.

рез точку (x_0, y_0) , заменяется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (рис. 1.13), каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек. При применении этого метода для приближенного вычисления значения искомого решения $y(x)$ в точке $x = b$, отрезок $x_0 \leq x \leq b$ (если $b > x_0$) делится на n равных частей точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, где $x_n = b$. Длина каждой части $x_{i+1} - x_i = h$ называется *шагом вычисления*. Приближенные значения

искомого решения в точках x_i обозначаем y_i .

Для вычисления y_1 заменяем на отрезке $x_0 \leq x \leq x_1$ искомую интегральную кривую отрезком ее касательной в точке (x_0, y_0) . Следовательно, $y_1 = y_0 + hy'_0$, где $y'_0 = f(x_0, y_0)$ (см. рис. 1.13). Аналогично вычисляем:

$$y_2 = y_1 + hy'_1, \quad \text{где} \quad y'_1 = f(x_1, y_1);$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2, \quad \text{где} \quad y'_2 = f(x_2, y_2);$$

.....

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}, \quad \text{где} \quad y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Если $b < x_0$, то схема вычислений остается прежней, но шаг h отрицателен.

Естественно ожидать, что при $h \rightarrow 0$ *ломанные Эйлера* приближаются к графику искомой интегральной кривой, и следовательно, с уменьшением шага h метод Эйлера дает все более и более точное значение искомого решения в точке b . Доказательство этого утверждения одновременно приведет нас к следующей фундаментальной теореме о существовании и единственности решения уравнения $dy/dx = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ при весьма общих *достаточных* условиях, наложенных на функцию $f(x, y)$.

Теорема 1.1 (о существовании и единственности решения). Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.22)$$

функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

и удовлетворяет в D условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|,$$

где N — постоянная, то существует единственное решение $y = \bar{y}(x)$, $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, уравнения (1.22), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, где

$$H < \min \left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N} \right),$$

$$M = \max f(x, y) \quad \text{в } D.$$

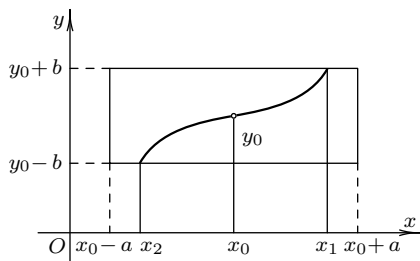


Рис. 1.14.

Условия теоремы нуждаются в некоторых пояснениях. Нельзя утверждать, что искомое решение

$y = \bar{y}(x)$ уравнения (1.22), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, будет существовать при $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, так как интегральная кривая $y = \bar{y}(x)$ может выйти из прямоугольника D через его верхнюю или нижнюю стороны $y = y_0 \pm b$ (рис. 1.14) при некотором значении $x = x_1$, $x_0 - a < x_1 < x_0 + a$, и тогда, если $x_1 > x_0$, при $x > x_1$ решение уже может быть не определено (если $x_1 < x_0$, то решение может быть не определено при $x < x_1$). Можно гарантировать, что интегральная кривая $y = \bar{y}(x)$ не выйдет за пределы области D при x , изменяющемся на отрезке $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, где H — наименьшее из двух чисел a , b/M (рис. 1.15), так как угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой заключен между угловыми коэффициентами M и $-M$ прямых, изображенных на рис. 1.15. Если эти прямые, между которыми заключена искомая интегральная кривая, выходят за пределы прямоугольника D через его горизонтальные стороны $y = y_0 \pm b$, то абсциссы точек пересечения этих сторон будут $x_0 \pm (b/M)$, следовательно, абсцисса точки выхода интегральной кривой из прямоугольника D может быть лишь меньше или равна $x_0 - (b/M)$ и больше или равна $x_0 + (b/M)$.

Можно доказать существование искомого решения на отрезке $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, где $H = \min(a, b/M)$, однако проще вначале доказать существование решения на отрезке $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, где $H < \min(a, b/M, 1/N)$, а в дальнейшем будут указаны условия, при выполнении которых решение может быть продолжено.

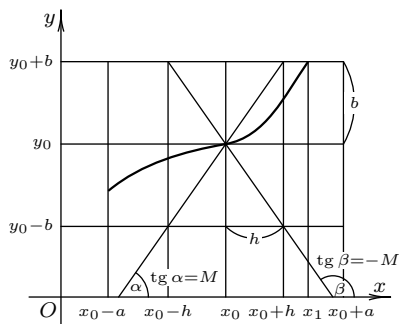


Рис. 1.15.

Условие Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

может быть заменено несколько более грубым, но зато обычно легко проверяемым условием существования ограниченной по модулю частной производной $f'_y(x, y)$ в области D .

Действительно, если в прямоугольнике D

$$|f'_y(x, y)| \leq N,$$

то, пользуясь теоремой о конечном приращении, получим

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = f'_y(x, \xi) |y_1 - y_2|,$$

где ξ — промежуточное между y_1 и y_2 значение. Следовательно, точка (x, ξ) лежит в D , поэтому

$$|f'_y(x, \xi)| \leq N \quad \text{и} \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|.$$

Нетрудно привести примеры функций $f(x, y)$ (например, $f(x, y) = |y|$ в окрестности точек $(x, 0)$), для которых условие Липшица выполнено, но производная $\partial f / \partial y$ в некоторых точках не существует, следовательно, условие $|\partial f / \partial y| \leq N$ является более грубым, чем условие Липшица.

Доказательство теоремы существования и единственности. Заменим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.22}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.23}$$

эквивалентным интегральным уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1.24)$$

Действительно, если некоторая функция $y = \bar{y}(x)$ при подстановке обращает в тождество уравнение (1.22) и удовлетворяет условию (1.23), то, интегрируя тождество (1.22) и принимая во внимание условие (1.23), получим, что $y = \bar{y}(x)$ обращает в тождество и уравнение (1.24). Если же некоторая функция $y = \bar{y}(x)$ при подстановке обращает уравнение (1.24) в тождество, то она, очевидно, удовлетворяет и условию (1.23), а дифференцируя тождество (1.24), получим, что $y = \bar{y}(x)$ обращает в тождество и уравнение (1.22).

Строим ломаную Эйлера $y = y_n(x)$, исходящую из точки (x_0, y_0) с шагом $h_n = H/n$ на отрезке $x_0 \leq x \leq x_0 + H$, n — целое положительное число (совершенно аналогично доказывается существование решения на отрезке $x_0 - H \leq x \leq x_0$). Ломаная Эйлера, проходящая через точку (x_0, y_0) , не может выйти из области D при $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ (или $x_0 - H \leq x \leq x_0$), так как угловые коэффициенты каждого звена ломаной по модулю меньше M .

Дальнейшее доказательство теоремы разобьем на три этапа:

- 1) Последовательность $y = y_n(x)$ равномерно сходится.
- 2) Функция $\bar{y}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ является решением интегрального уравнения (1.24).
- 3) Решение $\bar{y}(x)$ уравнения (1.24) единственно.

Доказательство 1). По определению ломаной Эйлера

$$y'_n(x) = f(x_k, y_k) \quad \text{при} \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(в угловой точке x_k взята правая производная), или

$$y'_n(x) = f(x, y_n(x)) + [f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))]; \quad (1.25)$$

обозначим

$$f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)) = \eta_n(x).$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ в D получим

$$|\eta_n(x)| = |f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon_n \quad (1.26)$$

при $n > N(\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как $|x - x_k| \leq h_n$, а $|y_k - y_n(x)| < Mh_n$ и $h_n = H/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Интегрируя (1.25) по x в пределах от x_0 до x и учитывая, что $y_n(x_0) = y_0$, получим

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt + \int_{x_0}^x \eta_n(t) dt. \quad (1.27)$$

Здесь n может принимать любое целое положительное значение, следовательно, при целом $m > 0$

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n+m}(t)) dt + \int_{x_0}^x \eta_{n+m}(t) dt. \quad (1.28)$$

Вычитая из (1.28) почленно (1.27) и взяв модуль разности, получим

$$\begin{aligned} & |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \\ &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))] dt + \int_{x_0}^x \eta_{n+m}(t) dt - \int_{x_0}^x \eta_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))| dt + \int_{x_0}^x |\eta_{n+m}(t)| dt + \int_{x_0}^x |\eta_n(t)| dt \end{aligned}$$

при $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ или, принимая во внимание (1.26) и условие Липшица:

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leq N \int_{x_0}^x |y_{n+m}(t) - y_n(t)| dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \\ & \leq N \max_{x_0} \int_{x_0}^x |y_{n+m}(t) - y_n(t)| dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H, \end{aligned}$$

откуда

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leq \frac{(\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H}{1 - NH} < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом $n > N_1(\varepsilon)$.

Итак,

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

при $n > N_1(\varepsilon)$, т. е. последовательность непрерывных функций $y_n(x)$ равномерно сходится при $x_0 \leq x \leq x_0 + H$:

$$y_n(x) \rightrightarrows \bar{y}(x),$$

где $\bar{y}(x)$ — непрерывная функция.

Доказательство 2). Перейдем в уравнении (1.27) к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \eta_n(x) dx$$

или

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \eta_n(x) dx. \quad (1.29)$$

В силу равномерной сходимости $y_n(x)$ к $\bar{y}(x)$ и равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ в D последовательность

$$f(x, y_n(x)) \rightrightarrows f(x, \bar{y}(x)).$$

Действительно,

$$|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, если $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$, но $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$, если $n > N_1(\delta(\varepsilon))$ для всех x из отрезка $x_0 \leq x \leq x_0 + H$.

Итак, $|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon$ при $n > N_1(\delta(\varepsilon))$, где N_1 не зависит от x .

В силу равномерной сходимости последовательности $f(x, y_n(x))$ к $f(x, \bar{y}(x))$ в (1.29) возможен переход к пределу под знаком интеграла. Принимая, кроме того, во внимание, что $|\eta_n(\varepsilon)| < \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, окончательно в (1.29) получим

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \bar{y}(x)) dx.$$

Итак, $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.24).

Доказательство 3). Допустим существование двух несовпадающих решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1.24) [стр. 39], следовательно,

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0.$$

Вычитая почленно из тождества

$$y_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

тождество

$$y_2(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2(x)) dx,$$

получим

$$y_1(x) - y_2(x) \equiv \int_{x_0}^x [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \\ &= \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] dx \right| \\ &\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| dx \right|. \end{aligned}$$

Пользуясь условием Липшица, будем иметь

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \\ &\leq N \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x |y_1(x) - y_2(x)| dx \right| \\ &\leq N \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} \left| \int_{x_0}^x dx \right| \\ &= NH \max_{x_0 \leq x \leq x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)|. \end{aligned}$$

Полученное неравенство

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \leq NH \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \quad (1.30)$$

противоречиво, если

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0,$$

так как по условию теоремы $H < (1/N)$, а из (1.30) следует, что $NH = 1$.

Противоречие снимается лишь при

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| = 0,$$

т. е. если $y_1(x) \equiv y_2(x)$ при $x_0 \leq x \leq x_0 + H$.

З а м е ч а н и е 1. Существование решения уравнения (1.22) [стр. 37] можно было бы доказать иным методом лишь в предположении непрерывности функции $f(x, y)$ (без условия Липшица), однако одной непрерывности функции $f(x, y)$ недостаточно для доказательства единственности решения.

З а м е ч а н и е 2. Существование и единственность решения $y = y(x)$ доказаны лишь на отрезке $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, однако, взяв точку $(x_0 + H, y(x_0 + H))$ за начальную, можно, повторив рассуждение, продолжить решение еще на отрезок длины H_1 , если, конечно, в окрестности новой начальной точки выполнены условия теоремы существования и единственности решения. Продолжая этот процесс, в некоторых случаях можно продолжить решение на всю полуось $x \geq x_0$ или даже на всю ось $-\infty < x < \infty$, если продолжить решения и в сторону меньших значений x . Однако возможны и другие случаи, даже если функция $f(x, y)$ определена для любых значений x и y .

Возможно, что интегральная кривая становится непродолжаемой ввиду приближения к точке, в которой нарушены условия теоремы существования и единственности решения (стр. 37) или интегральная кривая приближается к асимптоте, параллельной оси Oy .

Эти возможности иллюстрируются следующими примерами:

$$1) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad y = \pm \sqrt{c^2 - x^2}, \quad c = 1, \quad y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение непродолжаемо за пределы интервала $-1 < x < 1$. В граничных точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ правая часть уравнения $dy/dx = -(x/y)$ разрывна. Условия теоремы существования решения нарушены (рис. 1.16).

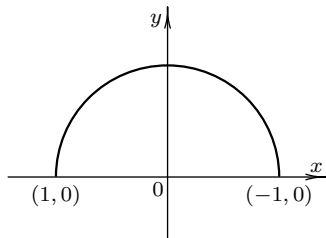


Рис. 1.16.

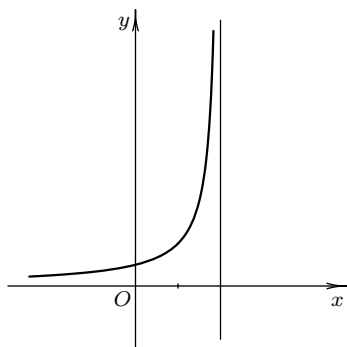


Рис. 1.17.

$$2) \frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(1) = 1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$y = -\frac{1}{x-c}, \quad c=2, \quad y = -\frac{1}{x-2},$$

и интегральная кривая продолжаема лишь до асимптоты $x=2$ ($-\infty < x < 2$) (рис. 1.17).

В настоящее время теоремы существования и единственности решений не только дифференциальных уравнений, но и уравнений иных типов очень часто доказывают методом неподвижных точек. Простейшей теоремой о неподвижных точках является принцип сжатых отображений.

Теорема (принцип сжатых отображений). Если в метрическом²⁾ полном³⁾ пространстве M задан оператор A , удовлетво-

²⁾ Пространство M называется метрическим, если в нем определена функция $\rho(y, z)$ пар точек этого пространства, удовлетворяющая для любых точек y и z рассматриваемого пространства условиям:

- 1) $\rho(y, z) \geq 0$, причем $\rho(y, y) = 0$ и из $\rho(y, z) = 0$ следует $y = z$;
- 2) $\rho(y, z) = \rho(z, y)$;
- 3) $\rho(y, z) \leq \rho(y, u) + \rho(u, z)$ (правило треугольника).

Функция ρ называется расстоянием в пространстве M .

³⁾ Метрическое пространство M называется полным, если каждая фундаментальная последовательность точек пространства M сходится в этом пространстве. Напомним, что последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ называется фундаментальной, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $N(\varepsilon)$ такое, что при $n \geq N(\varepsilon)$ расстояние $\rho(y_n, y_{n+m}) < \varepsilon$ при любом целом $m > 0$.

Докажем теперь, что \bar{y} является неподвижной точкой. Пусть $A[\bar{y}] = \bar{\bar{y}}$. Применяя два раза правило треугольника, получим

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) \leq \rho(\bar{y}, y_n) + \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}}).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $N(\varepsilon)$ такое, что при $n \geq N(\varepsilon)$

- 1) $\rho(\bar{y}, y_n) < \varepsilon/3$, так как $\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 2) $\rho(y_n, y_{n+1}) < \varepsilon/3$, так как последовательность y_n фундаментальна;
- 3) $\rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}}) = \rho(A[y_n], A[\bar{y}]) \leq \alpha \rho(y_n, \bar{y}) < \varepsilon/3$, откуда $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) < \varepsilon$, где ε можно выбрать сколь угодно малым. Следовательно,

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{y} = \bar{\bar{y}}, \quad A[\bar{y}] = \bar{y}.$$

Остается доказать, что неподвижная точка \bar{y} единственна. Если бы существовала еще одна неподвижная точка \bar{z} , то $\rho(A[\bar{y}], A[\bar{z}]) = \rho(\bar{y}, \bar{z})$, что противоречит условию 2) теоремы.

Применим принцип сжатых отображений к доказательству теоремы существования и единственности решения $y(x)$ ($x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$) дифференциального уравнения $dy/dx = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, в предположении, что в области D

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

функция f непрерывна и, следовательно, ограничена $|f| \leq M$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq N|y - z|.$$

Число $h_0 \leq \min(a, b/M)$ и будет точнее выбрано ниже.

Рассмотрим полное метрическое пространство C , точками которого являются всевозможные непрерывные функции $y(x)$, определенные на отрезке $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$, графики которых лежат в области D , а расстояние определяется равенством

$$\rho(y, z) = \max |y - z|,$$

где максимум берется при x , изменяющемся на отрезке

$$x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0.$$

Это пространство часто рассматривается в различных вопросах математического анализа и носит название *пространства равномерной*

сходимости, так как сходимость в смысле метрики этого пространства означает равномерную сходимость.

Заменим дифференциальное уравнение $dy/dx = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ эквивалентным интегральным уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1.24)$$

Рассмотрим оператор

$$A[y] = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx,$$

ставящий в соответствие каждой непрерывной функции $y(x)$, заданной на отрезке $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ и не выходящей из области D , непрерывную функцию $A[y]$, определенную на том же отрезке, график которой также не выходит из области D , так как $|\int_{x_0}^x f(x, y) dx| \leq Mh_0 \leq b$. Оператор $A[y]$, следовательно, удовлетворяет условию 1) принципа сжатых отображений.

Уравнение (1.24) при этом запишется в виде $y = A[y]$, и следовательно, для доказательства теоремы существования и единственности остается доказать существование в пространстве C единственной неподвижной точки $\bar{y}(x)$ оператора A , так как в этом случае $\bar{y} = A[\bar{y}]$ и уравнение (1.24) удовлетворяется.

Для доказательства теоремы остается проверить, удовлетворяет ли оператор A условию 2) принципа сжатых отображений:

$$\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z), \quad \alpha < 1,$$

где

$$\rho(A[y], A[z]) = \max \left| \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, z)] dx \right|.$$

Пользуясь неравенством Липшица, получим

$$\begin{aligned} \rho(A[y], A[z]) &\leq N \max \left| \int_{x_0}^x |y - z| dx \right| \\ &\leq N \max |y - z| \cdot \max \left| \int_{x_0}^x dx \right| \\ &= Nh_0 \max |y - z| = Nh_0 \rho(y, z). \end{aligned}$$

Выбирая h_0 так, чтобы $Nh_0 \leq \alpha < 1$, получим, что оператор A удовлетворяет условию

$$\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z), \quad \alpha < 1.$$

Итак, согласно принципу сжатых отображений существует единственная неподвижная точка $\bar{y}(x)$ оператора A , или, что то же самое, единственное непрерывное решение уравнения (1.24), и оно может быть найдено методом последовательных приближений.

Совершенно аналогично можно доказать теорему существования и единственности решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ для системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_i(x_0) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.32)$$

или

$$y_i = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.33)$$

в предположении, что в области D , определяемой неравенствами

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_{i0} - b_i \leq y_i \leq y_{i0} + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

правые части уравнений (1.32) удовлетворяют условиям:

1) все функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывны, а следовательно, и ограничены, $|f_i| \leq M$;

2) все функции f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют условию Липшица:

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq N \sum_{i=1}^n |y_i - z_i|.$$

Точкой пространства C будет теперь система n непрерывных функций (y_1, y_2, \dots, y_n) , т. е. n -мерная вектор-функция $Y(x)$ с координатами $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, определенная на отрезке $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$, где $h_0 \leq \min(a, b_1/M, \dots, b_n/M)$ и будет точнее выбрано ниже. Расстояние в пространстве C определяется равенством

$$\rho(Y(x), Z(x)) = \sum_{i=1}^n \max |y_i - z_i|,$$

где z_1, z_2, \dots, z_n — координаты вектор-функции $Z(x)$.

Нетрудно проверить, что при таком определении расстояния множество C n -мерных вектор-функций $Y(x)$ превращается в полное метрическое пространство. Оператор A определяется равенством

$$A[Y] = \left(y_{10} + \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx, \right. \\ \left. y_{20} + \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx, \dots, y_{n0} + \int_{x_0}^x f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right),$$

т. е. при действии оператора A на точку (y_1, y_2, \dots, y_n) получаем точку того же пространства C с координатами, равными правым частям системы (1.33).

Точка $A[Y]$ принадлежит пространству C , так как все ее координаты являются непрерывными функциями, не выходящими из области D , если координаты вектор-функции Y не выходили из области D .

Действительно,

$$\left| \int_{x_0}^x f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| \leq M h_0 \leq b_i,$$

и следовательно, $|y_i - y_{i0}| \leq b_i$.

Остается проверить выполнение условия 2) [стр. 45] принципа сжатых отображений:

$$\begin{aligned} & \rho(A[Y], A[Z]) \\ &= \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x [f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)] dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x |f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| dx \right| \\ &\leq N \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| dx \right| \\ &\leq N \sum_{i=1}^n \max |y_i - z_i| \cdot \sum_{i=1}^n \max \left| \int_{x_0}^x dx \right| = N n h_0 \rho(Y, Z). \end{aligned}$$

Следовательно, если выбрать $h_0 \leq \alpha/(nN)$, где $0 < \alpha < 1$, или $Nnh_0 \leq \alpha < 1$, то условие 2) [стр. 45] принципа сжатых отображений будет удовлетворено и будет существовать единственная неподвижная точка \bar{Y} , причем ее можно найти методом последовательных приближений. Но условие $\bar{Y} = A[\bar{Y}]$ по определению оператора A эквивалентно тождествам

$$\bar{y}_i \equiv y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где \bar{y}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — координаты вектор-функции \bar{Y} , то есть \bar{Y} является единственным решением системы (1.33).

Пример 1. Найти несколько последовательных приближений y_1, y_2, y_3 к решению уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 + y^2; \quad y(0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1. \\ y &= \int_0^x (x^2 + y^2) dx, \quad h_0 = \min \left(1, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Полагая $y_0(x) \equiv 0$, получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \quad y_2 = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}, \\ y_3 &= \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \right)^2 \right] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \left(1 + \frac{2x^4}{33} + \frac{x^8}{945} \right). \end{aligned}$$

Пример 2. При каких ограничениях линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности?

Для выполнения первого условия теоремы достаточно, чтобы на рассматриваемом отрезке изменения x , $a_1 \leq x \leq a_2$, функции $p(x)$ и $f(x)$ были бы непрерывны. При этом будет выполнено и второе условие теоремы существования и единственности, так как частная производная по y от правой части уравнения $dy/dx = -p(x)y + f(x)$ равна $-p(x)$ и вследствие непрерывности функции $p(x)$ на отрезке $a_1 \leq x \leq a_2$ ограничена по модулю (см. стр. 38). Итак, если $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $a_1 \leq x \leq a_2$, то через каждую точку (x_0, y_0) , где $a_1 < x_0 < a_2$, а y_0 задается произвольно, проходит единственная интегральная кривая рассматриваемого линейного уравнения.

Теорема 1.2 (о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных значений). Если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \quad (1.34)$$

непрерывна по μ при $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (стр. 37), причем постоянная Липшица N не зависит от μ , то решение $y(x, \mu)$ рассматриваемого уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, непрерывно зависит от μ .

Строим ломаные Эйлера $y_n = y_n(x, \mu)$, являющиеся непрерывными функциями μ , и, повторяя рассуждения на стр. 37–41, получим, что последовательность $y_n(x, \mu)$ сходится равномерно не только по x , но и по μ при $x_0 < x \leq x_0 + H$, $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$, так как N и H не зависят от μ , если $H < \min(a, b/M, 1/N)$, где $M \geq |f(x, y, \mu)|$. Следовательно, решение $y = \bar{y}(x, \mu)$ уравнения

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y, \mu) dx, \quad (1.35)$$

являющееся пределом последовательности $y_n(x, \mu)$, непрерывно не только по x , но и по μ .

Замечание. Если применить к уравнению (1.35) метод последовательных приближений, то последовательные приближения $y = y_n(x, \mu)$, являющиеся непрерывными функциями x и μ , равномерно сходятся к решению $\bar{y}(x, \mu)$ уравнения (1.35) (так как $\alpha = Nh < 1$ не зависит от μ). Следовательно, и этим методом можно доказать непрерывную зависимость решения от x и μ .

Очевидно, что доказательство несколько не изменится, если правая часть уравнения (1.34) является непрерывной функцией нескольких параметров в предположении, конечно, что постоянная Липшица N от них не зависит.

Тем же методом при аналогичных условиях можно было бы доказать непрерывную зависимость решения $y(x, x_0, y_0)$ уравнения $dy/dx = f(x, y)$ от начальных значений x_0 и y_0 , при этом пришлось бы лишь несколько уменьшить h_0 , так как в противном случае решения, определяемые начальными значениями, близкими к x_0, y_0 , могли бы выйти из области D уже при значениях x , лежащих на интервале $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$.

Однако еще проще заменой переменных свести вопрос о зависимости решения от начальных значений к уже рассмотренному выше случаю зависимости решения от параметров, содержащихся в правой части уравнения (1.34). Действительно, полагая $z = y(x, x_0, y_0) - y_0$, $t = x - x_0$, преобразуем уравнение $dy/dx = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ в $dz/dt = f(t + x_0, z + y_0)$, $z(0) = 0$, к которому уже можно применить теорему о непрерывной зависимости решения от параметров x_0 и y_0 , если функция f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Аналогичные теоремы теми же методами могут быть доказаны для систем уравнений.

Заметим, что непрерывная зависимость решения $y(x, x_0, y_0)$, $x_0 \leq x \leq b$ (или $b \leq x \leq x_0$), от начальных значений x_0 и y_0 означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon, b) > 0$ такое, что из неравенств

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta(\varepsilon, b) \quad \text{и} \quad |y_0 - \bar{y}_0| < \delta(\varepsilon, b)$$

следует неравенство

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon \quad (1.36)$$

при $x_0 \leq x \leq b$ (рис. 1.18).

С возрастанием b число $\delta(\varepsilon, b)$, вообще говоря, уменьшается и при $b \rightarrow \infty$ может стремиться к нулю. Поэтому далеко не всегда уда-

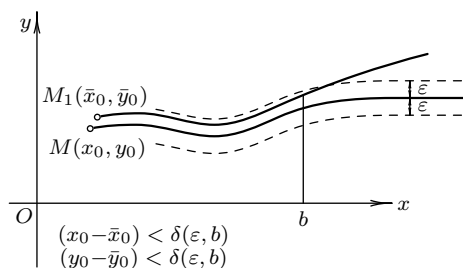


Рис. 1.18.

ется подобрать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, при котором неравенство (1.36) удовлетворялось бы для всех $x > x_0$, т. е. не всегда решения, близкие по начальным значениям, остаются близкими при сколь угодно больших значениях аргумента.

Решение, которое мало изменяется при произвольном,

но достаточно малом изменении начальных значений для сколь угодно больших значений аргумента, называется устойчивым. Подробнее об устойчивых решениях см. гл. 4.

Теорема 1.3 (об аналитической зависимости решения от параметра, теорема Пуанкаре). Решение $x(t, \mu)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x, \mu)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, аналитически зависит от параметра μ в окрестности значения

$\mu = \mu_0$, если функция f в заданной области изменения t и x и в некоторой окрестности точки μ_0 непрерывна по t и аналитически зависит от μ и x .

Аналогичное утверждение справедливо и для системы уравнений

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

причем в этом случае предполагается, что функции f_i непрерывны по первому аргументу и аналитически зависят от всех остальных аргументов.

Подробное доказательство этой теоремы, как и других теорем, требующих применения теории аналитических функций, мы не приводим, отсылая читателя к статье А. Н. Тихонова [4, 5], где дано наиболее простое доказательство теоремы об аналитической зависимости решения от параметра.

Идея доказательства А. Н. Тихонова сводится к следующему: считая, что μ может принимать и комплексные значения, доказывается существование предела $\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} (\Delta_\mu x(t, \mu) / \Delta\mu) = \partial x / \partial \mu$, что и означает аналитическую зависимость решения от μ . Существование этого предела следует из того, что отношение $\Delta_\mu x / \Delta\mu$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} = & \frac{f(t, x(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta_\mu x(t, \mu)} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} \\ & + \frac{f(t, x(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}, \quad \left. \frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} \right|_{t=t_0} = 0, \end{aligned}$$

решение которого единственно и при стремлении приращения $\Delta\mu$ по любому закону к нулю стремится к единственному решению уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad z(t_0) = 0.$$

Теорема 1.4 (о дифференцируемости решений). Если в окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные до k -го порядка включительно, то решение $y(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.37}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет непрерывные производные до $(k+1)$ -го порядка включительно.

Доказательство. Подставляя $y(x)$ в уравнение (1.37), получаем тождество

$$\frac{dy}{dx} \equiv f(x, y(x)), \quad (1.37_1)$$

и следовательно, решение $y(x)$ имеет в некоторой окрестности рассматриваемой точки непрерывную производную $f(x, y(x))$. Тогда, в силу существования непрерывных производных функции f , будет существовать непрерывная вторая производная решения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(x, y(x)).$$

Если $k > 1$, то, в силу существования непрерывных производных второго порядка функции f , можно, дифференцируя еще раз тождество (1.37₁), обнаружить существование и непрерывность третьей производной решения

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right).$$

Повторяя это рассуждение k раз, докажем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь точки (x_0, y_0) , в окрестности которых решения уравнения $dy/dx = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, не существует или решение существует, но не единственно. Такие точки называются *особыми точками*.

Кривая, состоящая сплошь из особых точек, называется *особой*. Если график некоторого решения сплошь состоит из особых точек, то решение называется *особым*.

Для нахождения особых точек или особых кривых надо прежде всего найти множество точек, в которых нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, так как только среди таких точек могут быть особые. Конечно, не каждая точка, в которой нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, обязательно является особой, так как условия этой теоремы достаточны для существования и единственности решения, но они не являются необходимыми.

Первое условие теоремы существования и единственности решения (см. стр. 37) нарушается в точках разрыва функции $f(x, y)$, причем если при приближении по любому пути к некоторой изолированной точке разрыва (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ неограниченно возрастает по модулю, то в тех задачах, в которых переменные x и y равноправны, как мы условились выше (см. стр. 14), уравнение $dy/dx = f(x, y)$ должно быть

заменено уравнением $dx/dy = 1/f(x, y)$, для которого правая часть уже непрерывна в точке (x_0, y_0) , если считать $1/f(x_0, y_0) = 0$.

Следовательно, в задачах, в которых переменные x и y равноправны, первое условие теоремы существования и единственности нарушается в тех точках, в которых и функция $f(x, y)$, и $1/f(x, y)$ разрывны.

Особенно часто приходится рассматривать уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (1.38)$$

где функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны. В этом случае функции $M(x, y)/N(x, y)$ и $N(x, y)/M(x, y)$ будут одновременно разрывны лишь в тех точках (x_0, y_0) , в которых $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ и не существует пределов

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Рассмотрим несколько типичных особых точек уравнения (1.38).

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения $dx/dy = x/(2y)$ разрывны в точке $x = 0$, $y = 0$. Интегрируя уравнение, получим $y = cx^2$ — семейство парабол (рис. 1.19) и $x = 0$. В начале координат — особая точка, называемая *узлом*.

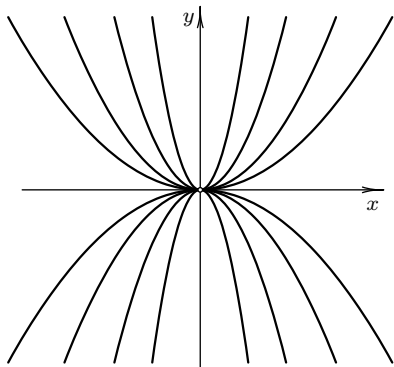


Рис. 1.19.

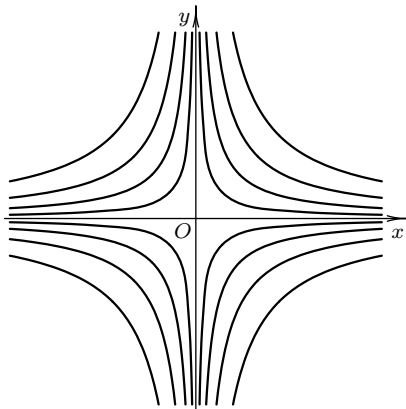


Рис. 1.20.

Пример 4.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения $dx/dy = -(x/y)$ разрывны в точке $x = 0$, $y = 0$. Интегрируя уравнение, получаем $y = c/x$ — семейство гипербол (рис. 1.20) и прямую $x = 0$. В начале координат — особая точка, называемая *седлом*.

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения $dx/dy = (x-y)/(x+y)$ разрывны в точке $x = 0$, $y = 0$. Интегрируя рассматриваемое однородное уравнение (сравните с примером 3 [§ 5 стр. 33]), получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

или в полярных координатах $\rho = ce^{\varphi}$ — логарифмические спирали (рис. 1.21). Особая точка такого типа называется *фокусом*.

Пример 6.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Правые части данного уравнения и уравнения $dx/dy = -(y/x)$ разрывны в точке $x = 0$, $y = 0$. Интегрируя уравнение, получаем $x^2 + y^2 = c^2$ — семейство окружностей с центром в начале координат (рис. 1.22). Особая точка

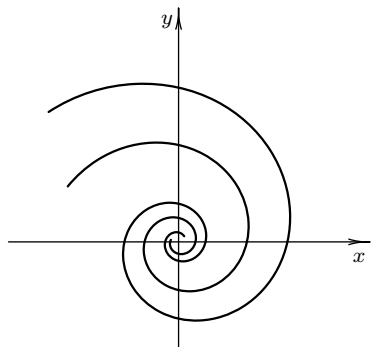


Рис. 1.21.

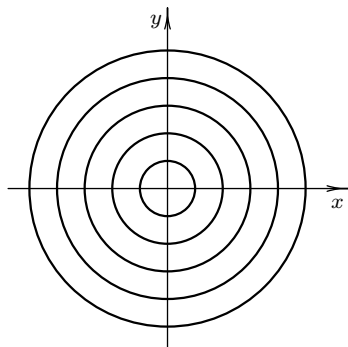


Рис. 1.22.

такого типа, т. е. особая точка, окрестность которой заполнена семейством замкнутых интегральных кривых, называется *центром*. В этом примере не существует решения, удовлетворяющего условию $y(0) = 0$.

К вопросу об особых точках и их классификации мы с несколько иной точки зрения еще вернемся в главе 4.

Второе условие теоремы 1.1 [стр. 37] существования и единственности решения — условие Липшица, или более грубое условие, требующее существования ограниченной частной производной $\partial f/\partial y$, чаще всего нарушается в точках, при приближении к которым $\partial f/\partial y$ неограниченно возрастает, т. е. в точках, в которых $1/\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Уравнение $1/\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, вообще говоря, определяет некоторую кривую, в точках которой может быть нарушена единственность. Если в точках этой кривой единственность нарушена, то кривая будет особой; если, кроме того, эта кривая окажется интегральной, то получим особую интегральную кривую.

Возможно, что кривая $1/\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ имеет несколько ветвей, тогда для каждой ветви надо решить вопрос о том, будет ли эта ветвь особой кривой и будет ли она интегральной кривой.

Пример 7. Имеет ли уравнение $dy/dx = y^2 + x^2$ особое решение?

Условия теоремы существования и единственности выполнены в окрестности любой точки, следовательно, особого решения нет.

Пример 8. Имеет ли уравнение $dy/dx = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$ особое решение?

Правая часть непрерывна, но частная производная $\partial f/\partial y = \frac{2}{3}(y-x)^{-1/3}$ неограниченно возрастает при приближении к прямой $y = x$, следовательно, на прямой $y = x$ может нарушиться единственность. Но функция $y = x$ не удовлетворяет рассматриваемому уравнению, следовательно, особого решения нет.

Пример 9. Имеет ли уравнение $dy/dx = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1$ особое решение?

Как и в предыдущем примере, уравнение $1/\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ имеет вид $y = x$, но на этот раз функция $y = x$ удовлетворяет данному уравнению. Остается выяснить, нарушена ли единственность в точках этой прямой. Заменой переменных $z = y - x$ приводим исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, после чего без труда находим решение: $y - x = (x - c)^3/27$. Кривые этого семейства проходят через точки графика решения $y = x$ (рис. 1.23). Следовательно, в каждой точке прямой

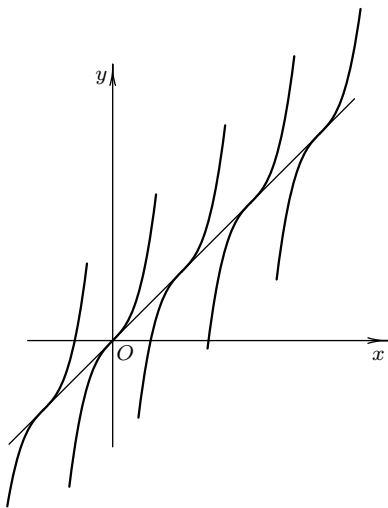


Рис. 1.23.

$y = x$ единственность нарушена и функция $y = x$ является особым решением.

Этот пример показывает, что одной непрерывности правой части в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

недостаточно для единственности решения основной начальной задачи, однако можно доказать, что существование решения при этом уже обеспечивается.

§ 7. Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка

В предыдущем параграфе мы уже познакомились с двумя приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений: методом Эйлера и методом последовательных приближений. Однако оба эти метода имеют существенные недостатки, в силу которых ими сравнительно редко пользуются в практике приближенных вычислений.

Достоинства приближенных методов оцениваются по точности даваемых ими результатов и по простоте вычислений. Недостатками метода последовательных приближений являются сравнительно медленная сходимость приближений к решению и сложность вычислений. Недостатком метода Эйлера является малая точность, для повышения которой приходится брать весьма малый шаг h , что приводит к длительным вычислениям.

Впрочем, небольшое усовершенствование *метода Эйлера*, так называемое *уравнивание* (или итерация), приводит уже к довольно удобной вычислительной схеме. При применении метода Эйлера с уравниванием делят отрезок $x_0 \leq x \leq b$, на котором надо вычислить решение уравнения $dy/dx = f(x, y)$, определяемое условием $y(x_0) = y_0$, на равные части длиной $h = (b - x_0)/n$. Обозначая $x_0 + kh = x_k$, $y(x_0 + kh) = y_k$, $y'(x_0 + kh) = y'_k$, вычисляют y_{k+1} , если уже найдено y_k , вначале по формуле Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k \quad \text{или} \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = hy'_k, \quad (1.39)$$

т. е. на отрезке $x_0 + kh \leq x \leq x_0 + (k+1)h$ заменяют интегральную кривую, проходящую через точку (x_k, y_k) , отрезком ее касательной в той же точке (см. рис. 1.13 [стр. 36]). Затем уточняют вычисленное значение y_{k+1} , для чего определяют производную $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$ и снова применяют формулу Эйлера (1.39), но вместо y'_k берут среднее арифметическое вычисленных значений производных в граничных

точках $(y'_k + y'_{k+1})/2$, т. е. считают

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + h \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2}. \quad (1.40)$$

Вновь вычисленное значение \bar{y}_{k+1} дает возможность вычислить новое значение производной $\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$, после чего снова вычисляются среднее арифметическое значений производных $(y'_k + \bar{y}'_{k+1})/2$, снова применяют формулу (1.40)

$$\bar{\bar{y}}_{k+1} = y_k + h \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2}$$

и продолжают этот процесс до тех пор, пока в пределах заданной точности не совпадут результаты двух последовательных вычислений значений y_{k+1} . После этого тем же методом вычисляется y_{k+2} и т. д.

Метод Эйлера с уравниванием дает на каждом шаге погрешность порядка h^3 и нередко применяется в вычислительной практике. Однако значительно чаще применяются более точные методы (методы Штермера, Рунге, Мильна и др.), основанные на замене искомого решения несколькими членами его тейлоровского разложения

$$y_{k+1} \approx y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \dots + \frac{h^n}{n!} y_k^{(n)}, \quad (1.41)$$

т. е. замене искомой интегральной кривой параболой n -го порядка, имеющей касание n -го порядка с интегральной кривой в точке $x = x_k$, $y = y_k$.

Непосредственное применение формулы Тейлора (1.41) на каждом шаге приводит к сложным и неоднотипным вычислениям, поэтому эта формула обычно применяется лишь для вычисления нескольких близких к $x = x_0$ значений, необходимых для применения более удобных вычислительных схем, среди которых в первую очередь следует назвать *метод Штермера*, в котором вычисление проводится по одной из следующих формул в зависимости от порядка аппроксимирующей параболы:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1}, \quad (1.42)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2}, \quad (1.43)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3}, \quad (1.44)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{k-4}, \quad (1.45)$$

.

где

$$\begin{aligned} q_k &= y_k h, \\ \Delta q_{k-1} &= q_k - q_{k-1}, \\ \Delta^2 q_{k-2} &= \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2}, \\ \Delta^3 q_{k-3} &= \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3}, \\ \Delta^4 q_{k-4} &= \Delta^3 q_{k-3} - \Delta^3 q_{k-4}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Формулы Штермера могут быть получены путем интегрирования в пределах от x_k до x_{k+1} тождества $y' \equiv f(x, y(x))$, в котором $y(x)$ является искомым решением:

$$y_{k+1} \equiv y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx,$$

и применения известной из курса анализа квадратурной формулы:

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx \approx h \left[\varphi_k + \frac{1}{2} \Delta \varphi_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \varphi_{k-2} \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \Delta^3 \varphi_{k-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 \varphi_{k-4} + \dots \right]. \quad (1.46) \end{aligned}$$

Напомним, что эта квадратурная формула получается путем замены подынтегральной функции $\varphi(x)$ аппроксимирующим многочленом по интерполяционной формуле Ньютона и вычисления интегралов от отдельных слагаемых.

Оценка остаточного члена квадратурной формулы (1.46) показывает, что погрешность в формуле (1.42) при одном шаге имеет порядок h^3 , в формуле (1.43) h^4 , в формуле (1.44) h^5 , в формуле (1.45) h^6 . Если же принять во внимание, что при нескольких шагах погрешности могут суммироваться, то для оценки погрешности при n шагах надо оценки, полученные для одного шага, умножить на $n = (b - x_0)/h$, что может привести к изменению указанного выше порядка погрешности.

З а м е ч а н и е. Можно показать непосредственным разложением по формуле Тейлора в окрестности точки $x = x_k$, что правая часть формулы Штермера (1.42) с точностью до членов, содержащих h в степенях выше второй, совпадает с первыми тремя членами разложения y_{k+1} по формуле Тейлора (1.41):

$$y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k; \quad (1.47)$$

правая часть следующей формулы Штермера (1.43) с точностью до членов, содержащих h в степенях выше третьей, совпадает с

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!}y''_k + \frac{h^3}{3!}y'''_k$$

и т. д. Для формулы (1.42), например, получим

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h\Delta y'_{k-1} = y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h(y'_k - y'_{k-1}), \quad (1.48)$$

или, разлагая

$$y'_{k-1} = y'(x_{k-1})$$

по формуле Тейлора

$$y'(x_{k-1}) = y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_k) + \dots$$

и подставляя в (1.48), получим:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h(y'_k - y'_{k-1}) = y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h^2y''_k - \frac{1}{4}h^3y'''_k + \dots,$$

и следовательно, три первых члена совпадают с тремя членами разложения по формуле Тейлора (1.47).

Для начала вычисления по формулам Штермера необходимо знать значения искомой функции не в одной, а в нескольких точках (при применении формулы (1.42) в двух точках: x_0 и $x_0 + h$, при применении формулы (1.43) в трех точках: x_0 , $x_0 + h$ и $x_0 + 2h$, и т. д.). Эти несколько первых значений могут быть вычислены методом Эйлера с уменьшенным шагом или путем использования формулы Тейлора (1.41), или кратко изложенным ниже *методом Рунге*.

Возьмем для определенности формулу (1.44):

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}$$

и предположим, что, кроме заданного начального значения y_0 , уже найдены y_1 , y_2 , и y_3 . Тогда можно вычислить:

$$\begin{aligned} q_0 &= f(x_0, y_0)h, & q_1 &= f(x_1, y_1)h, \\ q_2 &= f(x_2, y_2)h, & q_3 &= f(x_3, y_3)h, \end{aligned}$$

а следовательно, и

$$\Delta q_0 = q_1 - q_0, \quad \Delta q_1 = q_2 - q_1, \quad \Delta q_2 = q_3 - q_2, \\ \Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0, \quad \Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1, \quad \Delta^3 q_0 = \Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0.$$

Теперь по формуле (1.44) вычисляем значение y_4 , зная которое получим q_4 , Δq_3 , $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$. Затем по той же формуле (1.44) вычисляем y_5 и т. д.

Результаты вычисления заносятся в приводимую ниже, постепенно заполняющуюся таблицу:

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
x_2	y_2	q_2	Δq_2		
x_3	y_3	q_3			
x_4					
x_5					
x_6					

Обычно требуется вычислить значение искомого решения дифференциального уравнения в некоторой точке $x = b$ с заданной точностью. При этом сейчас же возникает вопрос, какой из формул Штермера целесообразно пользоваться и какой шаг h гарантирует требуемую точность вычислений и в то же время не является чрезмерно малым и тем самым не приводит к лишним вычислениям. Некоторое представление о выборе формулы, по которой целесообразно вести вычисления, и о выборе шага дают указанные выше порядки погрешностей при каждом шаге, при этом, конечно, надо иметь в виду, что при нескольких шагах погрешности могут суммироваться. При правильном выборе шага h все разности в таблице должны меняться плавно, а последние разности в формуле (1.44) должны влиять лишь на запасные знаки. Резкое изменение какой-нибудь разности указывает на то, что при выбранном шаге h могут оказаться неучтенными особенности изменения функции на рассматриваемом отрезке, что может повлечь за собой значительные ошибки при вычислении y_{k+1} .

Однако все эти соображения не являются вполне надежными, а более точные оценки погрешности оказываются весьма громоздкими и неудобными. Поэтому обычно применяют следующий практически достаточно надежный метод: выбрав, исходя из указанных выше неточных соображений, некоторый шаг h , проводят вычисления по одной из формул Штермера с шагом h и $\frac{1}{2}h$ и сравнивают результаты в общих точках. Если в пределах заданной точности результаты совпадают, то считают, что шаг h обеспечивает заданную точность вычисления; если же результаты в пределах заданной точности не совпадают, то снова уменьшают шаг вдвое и проводят вычисления с шагом $\frac{1}{2}h$ и $\frac{1}{4}h$ и опять сравнивают результаты и т. д.

Вычисления с шагом h и $\frac{1}{2}h$ целесообразно проводить параллельно, чтобы как можно раньше заметить несовпадение результатов и не производить лишней работы. Этот способ двойного счета имеет еще то преимущество, что при его применении почти полностью исключаются ошибки в вычислениях, так как они, как правило, немедленно обнаруживаются при сравнении результатов вычислений с шагом h и $\frac{1}{2}h$.

Для нахождения нескольких первых значений y_i , необходимых для начала вычислений по методу Штермера, кроме указанных выше способов (метод Эйлера с уменьшенным шагом с итерациями или без итераций или метод разложения по формуле Тейлора), можно рекомендовать еще метод Рунге.

По методу Рунге для нахождения y_{k+1} надо вычислить четыре числа:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(x_k, y_k), & m_4 &= f(x_k + h, y_k + m_3 h), \\ m_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_2 h}{2}\right), & m_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_1 h}{2}\right), \end{aligned} \quad (1.49)$$

и тогда

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \quad (1.50)$$

Обычно метод Рунге применяется лишь для вычисления нескольких первых значений y_1, y_2, \dots , необходимых для начала вычисления по методу Штермера, однако можно этим методом вычислять и остальные значения. Метод Рунге, так же как и метод Штермера, основан на аппроксимации искомой интегральной кривой соприкасающейся параболой.

Если сравнить правую часть формулы Рунге (1.50) с разложением по формуле Тейлора

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2!} y''_k h^2 + \frac{1}{3!} y'''_k h^3 + \frac{1}{4!} y^{IV}_k h^4 + \dots,$$

то окажется, что члены со степенями ниже пятой совпадают. Поэтому при вычислении нескольких начальных значений по методу Рунге с переходом затем на вычисление по методу Штермера по формулам (1.42), (1.43) или (1.44) (стр. 59) можно вычисление вести с тем же шагом h ; если же в дальнейшем применяется формула Штермера (1.45), то начало вычисления по методу Рунге надо вести с уменьшенным шагом, так как при одном и том же шаге формула (1.50) не гарантирует той точности вычислений, какую гарантирует формула (1.45). Впрочем, нередко даже при использовании формул Штермера (1.43) и (1.44) начало вычислений все же ведут по формулам Рунге с уменьшенным шагом, так как даже небольшая погрешность в вычислении исходных для формул Штермера значений может резко уменьшить точность дальнейших вычислений⁴).

Современные быстродействующие вычислительные машины дискретного действия позволяют выполнить указанные выше вычисления по методу Штермера или Рунге с необычайной быстротой (многие десятки и даже сотни тысяч операций в секунду), причем и процесс программирования может быть значительно упрощен применением стандартных программ, разработанных для методов Штермера и Рунге. При этом при приближенном интегрировании дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, надо составить лишь подпрограмму для вычисления значений $y'_k = f(x_k, y_k)$ и включить ее в стандартную программу.

Пример.

$$y' = x^2 + y^2; \quad y(0) = -1.$$

Найти значение $y(0,5)$ с точностью до 0,01.

Воспользовавшись разложением по формуле Тейлора

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \dots,$$

вычисляем значение $y(x)$ в точках $x_1 = 0,1$ и $x_2 = 0,2$:

$$y(0,1) = -0,9088 \quad \text{и} \quad y(0,2) = -0,8309$$

(или вместо $y(0,2)$ вычисляем $y(-0,1)$, что даже предпочтительнее, так как точка $x_1 = -0,1$ лежит ближе к начальной точке $x_0 = 0$, чем точка $x_2 = 0,2$). Дальнейшие значения вычисляем по формуле Штермера (1.43) [стр. 59] с шагом $h = 0,1$, а результаты вычисления заносим в таблицу (без разностей $\Delta^3 q$). После этого или параллельно проводим вычисления с шагом $\frac{1}{2}h = 0,05$. В результате получим:

$$y(0,5) \approx -0,63.$$

⁴) Более подробно о приближенных методах интегрирования дифференциальных уравнений можно прочесть в книгах А. Н. Крылова [7] и И. С. Березина и Н. П. Жидкова [8] (см. рекомендуемую литературу).

§ 8. Простейшие типы уравнений, не разрешенных относительно производной

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.51)$$

Если это уравнение удастся разрешить относительно y' , то получаем одно или несколько уравнений

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Интегрируя эти, уже разрешенные относительно производной уравнения, найдем решения исходного уравнения (1.51).

Проинтегрируем, например, уравнение

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0. \quad (1.52)$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно y' , будем иметь: $y' = x$ и $y' = y$. Интегрируя каждое из полученных уравнений, находим:

$$y = \frac{x^2}{2} + c \quad (1.53)$$

и

$$y = ce^x \quad (1.54)$$

(рис. 1.24). Оба семейства решений удовлетворяют исходному уравнению.

Гладкими интегральными кривыми уравнения (1.52) будут также кривые, составленные из дуги интегральной кривой семейства (1.53) и дуги интегральной кривой семейства (1.54), если в общей точке они имеют общую касательную. На рис. 1.25 изображена интегральная кривая уравнения (1.52), составленная из графиков решений $y = x^2/2 + c$ при $c = \frac{1}{2}$, $-\infty < x \leq 1$, и $y = ce^x$ при $c = e^{-1}$, $1 \leq x < \infty$, а на рис. 1.26 — интегральная кривая уравнения (1.52), составленная из графиков решений $y = x^2/2$ при $x \leq 0$ и $y \equiv 0$ при $x > 0$.

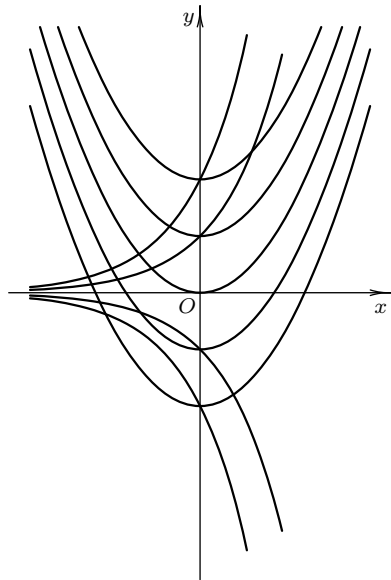


Рис. 1.24.

Итак, уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.51)$$

может быть проинтегрировано путем разрешения относительно y' и интегриации полученных при этом уравнений $y' = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$), уже разрешенных относительно производной.

Однако далеко не всегда уравнение (1.51) легко разрешается относительно y' и еще реже полученные после разрешения относительно y'

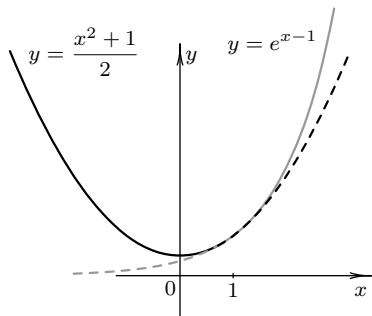


Рис. 1.25.

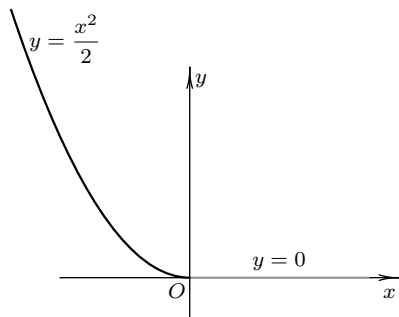


Рис. 1.26.

уравнения $y' = f_i(x, y)$ легко интегрируются, поэтому часто приходится интегрировать уравнения вида (1.51) иными методами. Рассмотрим следующие случаи.

1. Уравнение (1.51) имеет вид

$$F(y') = 0, \quad (1.55)$$

причем существует по крайней мере один действительный корень $y' = k_i$ этого уравнения.

Так как уравнение (1.55) не содержит x и y , то k_i — постоянное. Следовательно, интегрируя уравнение $y' = k_i$, получим $y = k_i x + c$, или $k_i = (y - c)/x$, но k_i является корнем уравнения (1.55), следовательно, $F((y - c)/x) = 0$ является интегралом рассматриваемого уравнения.

Пример 1.

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0.$$

Интеграл уравнения

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^5 + \frac{y-c}{x} + 3 = 0.$$

2. Уравнение (1.51) имеет вид

$$F(x, y') = 0. \quad (1.56)$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y' , то целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (1.56) двумя уравнениями: $x = \varphi(t)$ и $y' = \psi(t)$. Так как $dy = y' dx$, то в данном случае $dy = \psi(t)\varphi'(t) dt$, откуда $y = \int \psi(t)\varphi'(t) dt + c$ и, следовательно, интегральные кривые уравнения (1.56) определяются в параметрической форме следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \int \psi(t)\varphi'(t) dt + c. \end{aligned}$$

Если уравнение (1.56) легко разрешимо относительно x , $x = \varphi(y')$, то почти всегда удобно в качестве параметра ввести $y' = t$. Тогда

$$x = \varphi(t), \quad dy = y' dx = t\varphi'(t) dt, \quad y = \int t\varphi'(t) dt + c.$$

Пример 2.

$$x = (y')^3 - y' - 1.$$

Положим $y' = t$, тогда

$$\begin{aligned} x &= t^3 - t - 1, \\ dy &= y' dx = t(3t^2 - 1) dt, \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$y = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + c_1. \tag{1.58}$$

Уравнения (1.57) и (1.58) определяют в параметрической форме семейство искоемых интегральных кривых.

Пример 3.

$$x\sqrt{1+y'^2} = y'$$

Полагаем $y' = \operatorname{tg} t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$; тогда

$$x = \sin t, \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned} dy &= y' dx = \operatorname{tg} t \cos t dt = \sin t dt, \\ y &= -\cos t + c_1 \end{aligned} \tag{1.60}$$

или, исключая t из уравнений (1.59) и (1.60), получим $x^2 + (y - c_1)^2 = 1$ — семейство окружностей.

3. Уравнение (1.51) имеет вид

$$F(y, y') = 0. \tag{1.61}$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y' , то, как и в предыдущем случае, целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (1.61) двумя уравнениями: $y = \varphi(t)$ и $y' = \psi(t)$. Так как $dy = y' dx$, то $dx = dy/y' = (\varphi'(t)/\psi(t)) dt$, откуда $x = \int (\varphi'(t)/\psi(t)) dt + c$. Следовательно, искомые интегральные кривые в параметрической форме определяются уравнениями

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + c \quad \text{и} \quad y = \varphi(t).$$

В частности, если уравнение (1.61) легко разрешимо относительно y , то обычно за параметр удобно взять y' .

Действительно, если $y = \varphi(y')$, то, полагая $y' = t$, получим $y = \varphi(t)$, $dx = dy/y' = (\varphi'(t)/t) dt$,

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{t} + c.$$

Пример 4.

$$y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5.$$

Полагаем $y' = t$; тогда

$$y = t^5 + t^3 + t + 5, \tag{1.62}$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{(5t^4 + 3t^2 + 1) dt}{t} = \left(5t^3 + 3t + \frac{1}{t} \right) dt,$$

$$x = \frac{5t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + \ln |t| + c. \tag{1.63}$$

Уравнения (1.62) и (1.63) являются параметрическими уравнениями семейства интегральных кривых.

Пример 5.

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1.$$

Полагаем $y' = \operatorname{sh} t$, тогда

$$y = \operatorname{ch} t, \tag{1.64}$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = dt,$$

$$x = t + c \tag{1.65}$$

или, исключая из (1.64) и (1.65) параметр t , получаем $y = \operatorname{ch}(x - c)$.

Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.51)$$

зависит от всех трех аргументов x, y, y' . Заменим уравнение (1.51) его параметрическим представлением:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Пользуясь зависимостью $dy = y' dx$, будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right],$$

откуда, разрешая относительно производной dv/du , получим

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}}. \quad (1.66)$$

В результате получено уравнение первого порядка, уже *разрешенное относительно производной*, и тем самым задача сведена к уже рассмотренной в предыдущих параграфах, однако, конечно, полученное уравнение (1.66) далеко не всегда будет интегрироваться в квадратурах.

Если уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

легко разрешимо относительно y , то за параметры u и v часто удобно брать x и y' . Действительно, если уравнение (1.51) приводится к виду

$$y = f(x, y'), \quad (1.67)$$

то, считая x и $y' = p$ параметрами, получим

$$y = f(x, p), \quad dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}, \\ p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Интегрируя уравнение (1.68) (конечно, оно далеко не всегда интегрируется в квадратурах), получим $\Phi(x, p, c) = 0$. Совокупность уравнений $\Phi(x, p, c) = 0$ и $y = f(x, p)$, где p — параметр, определяет семейство интегральных кривых.

Заметим, что уравнение (1.68) может быть получено дифференцированием уравнения (1.67) по x . Действительно, дифференцируя (1.67) по x и полагая $y' = p$, получим $p = (\partial f / \partial x) + (\partial f / \partial p) \cdot (dp / dx)$, что совпадает с (1.68). Поэтому этот метод часто называют интегрированием дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования.

Совершенно аналогично часто интегрируется уравнение

$$F(x, y, y') = 0,$$

если оно легко разрешимо относительно x :

$$x = f(y, y'). \quad (1.69)$$

В этом случае, взяв за параметры y и $y' = p$ и пользуясь зависимостью $dy = y' dx$, получим

$$dy = p \left[\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \right]$$

или

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}. \quad (1.70)$$

Интегрируя уравнение (1.70), получим $\Phi(y, p, c) = 0$. Это уравнение совместно с $x = f(y, p)$ определяет интегральные кривые исходного уравнения. Уравнение (1.70) может быть получено из уравнения (1.69) дифференцированием по y .

В качестве примера применения этого метода рассмотрим линейное относительно x и y уравнение

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

называемое *уравнением Лагранжа*. Дифференцируя по x и полагая $y' = p$, получим

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}, \quad (1.71)$$

или

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \quad (1.72)$$

Это уравнение линейно относительно x и dx/dp и, следовательно, легко интегрируется, например, методом вариации постоянной. Получив интеграл $\Phi(x, p, c) = 0$ уравнения (1.72) и присоединяя к нему $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, получим уравнения, определяющие искомые интегральные кривые.

При переходе от уравнения (1.71) к уравнению (1.72) пришлось делить на dp/dx . Но при этом мы потеряем решения, если они существуют, для которых p постоянно, а значит $dp/dx \equiv 0$. Считая p постоянным, замечаем, что уравнение (1.71) удовлетворяется лишь в том случае, если p является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$.

Итак, если уравнение $p - \varphi(p) = 0$ имеет действительные корни $p = p_i$, то к найденным выше решениям уравнения Лагранжа надо еще добавить $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, $p = p_i$, или, исключая p , $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$ — прямые линии.

Отдельно надо рассмотреть случай, когда $p - \varphi(p) \equiv 0$, и следовательно, при делении на dp/dx теряется решение $p = c$, где c — произвольная постоянная. В этом случае $\varphi(y') \equiv y'$ и уравнение $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ принимает вид

$$y = xy' + \psi(y') \quad \text{— уравнение Клеро.}$$

Полагая $y' = p$, получим $y = xp + \psi(p)$. Дифференцируя по x , будем иметь:

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx},$$

или

$$(x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0,$$

откуда или $dp/dx = 0$ и, значит, $p = c$, или $x + \psi'(p) = 0$.

В первом случае, исключая p , получим:

$$y = cx + \psi(c) \tag{1.73}$$

— однопараметрическое семейство интегральных прямых. Во втором случае решение определяется уравнениями

$$y = xp + \psi(p) \quad \text{и} \quad x + \psi'(p) = 0. \tag{1.74}$$

Нетрудно проверить, что интегральная кривая, определяемая уравнениями (1.74), является огибающей семейства интегральных прямых (1.73).

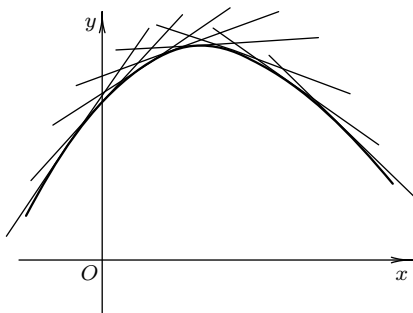


Рис. 1.27.

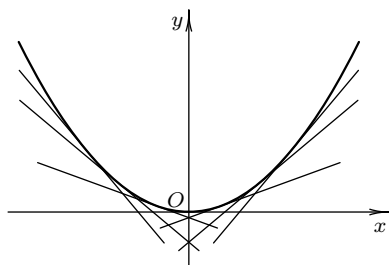


Рис. 1.28.

Действительно, *огibaющая* некоторого семейства $\Phi(x, y, c) = 0$ определяется уравнениями

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \quad (1.75)$$

которые для семейства $y = cx + \psi(c)$ имеют вид

$$y = cx + \psi(c), \quad x + \psi'(c) = 0$$

и лишь обозначением параметра отличаются от уравнений (1.74) (рис. 1.27).

Замечание. Как известно, уравнения (1.75) могут определять, кроме *огibaющей*, геометрические места кратных точек, а иногда и другие кривые, однако если хотя бы одна из производных $\partial \Phi / \partial x$ и $\partial \Phi / \partial y$ отлична от нуля и обе ограничены в точках, удовлетворяющих уравнениям (1.75), то эти уравнения определяют только *огibaющую*. В данном случае эти условия выполнены: $\partial \Phi / \partial x = -c$, $\partial \Phi / \partial y = 1$. Следовательно, уравнения (1.75) определяют *огibaющую*, которая может вырождаться в точку, если семейство (1.73) является пучком прямых.

Пример 6.

$$y = xy' - y'^2 \quad \text{— уравнение Клеро.}$$

Однопараметрическое семейство интегральных прямых имеет вид $y = cx - c^2$. Кроме того, интегральной кривой является *огibaющая* этого семейства, определяемая уравнениями $y = cx - c^2$ и $x - 2c = 0$. Исключая c , получаем $y = x^2/4$ (рис. 1.28).

Пример 7.

$$y = 2xy' - y'^3 \quad \text{— уравнение Лагранжа.}$$

$$y' = p,$$

$$y = 2xp - p^3. \quad (1.76)$$

Дифференцируя, получаем

$$p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - 3p^2 \frac{dp}{dx} \quad (1.77)$$

и после деления на dp/dx приходим к уравнению

$$p \frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2.$$

Интегрируя это линейное уравнение, получаем $x = (c_1/p^2) + \frac{3}{4}p^2$. Следовательно, интегральные кривые определяются уравнениями $y = 2xp - p^3$, $x = (c_1/p^2) + \frac{3}{4}p^2$.

При делении на dp/dx , как указывалось выше (см. стр. 71), теряются решения $p = p_i$, где p_i — корни уравнения $p - \varphi(p) = 0$. В данном случае теряется решение $p = 0$ уравнения (1.77), которому, в силу уравнения (1.76), соответствует решение исходного уравнения $y = 0$.

§ 9. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Особые решения

В § 6 была доказана теорема существования и единственности решения $y(x)$ уравнения $dy/dx = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$ [стр. 37]. Аналогичный вопрос возникает и для уравнений вида $F(x, y, y') = 0$. Очевидно, что для таких уравнений через некоторую точку (x_0, y_0) , вообще говоря, проходит уже не одна, а несколько интегральных кривых, так как, разрешая уравнение $F(x, y, y') = 0$ относительно y' , мы, как правило, получаем не одно, а несколько действительных значений $y' = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$), и если каждое из уравнений $y' = f_i(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности § 6 (стр. 37), то для каждого из этих уравнений найдется единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Поэтому свойство единственности решения уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, обычно понимается в том смысле, что через данную точку (x_0, y_0) по данному направлению проходит не более одной интегральной кривой уравнения $F(x, y, y') = 0$.

Например, для решений уравнения $(dy/dx)^2 - 1 = 0$ свойство единственности всюду выполнено, так как через каждую точку (x_0, y_0) проходят две интегральные кривые, но по различным направлениям. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1, \quad y = x + c \quad \text{и} \quad y = -x + c.$$

Для уравнения $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$, рассмотренного на стр. 65, в точках прямой $y = x$ свойство единственности нарушено, так как через точки этой прямой проходят интегральные кривые уравнений $y' = x$ и $y' = y$ по одному и тому же направлению (рис. 1.29).

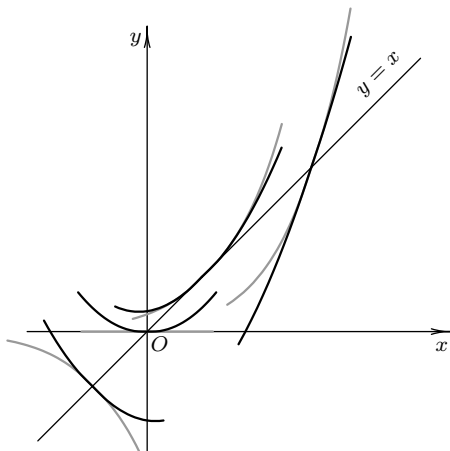


Рис. 1.29.

Теорема 1.5. Существует единственное решение $y = y(x)$, $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$, где h_0 достаточно мало, уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.78)$$

удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, для которого $y'(x_0) = y'_0$, где y'_0 — один из действительных корней уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$, если в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) функция $F(x, y, y')$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(x, y, y')$ непрерывна по всем аргументам;
- 2) производная $\partial F / \partial y'$ существует и отлична от нуля;
- 3) существует ограниченная по модулю производная $\partial F / \partial y$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq N_1.$$

Доказательство. Согласно известной теореме о существовании неявной функции можно утверждать, что условия 1) и 2) гарантируют существование единственной непрерывной в окрестности точки (x_0, y_0) функции $y' = f(x, y)$, определяемой уравнением (1.78) и удовлетворяющей условию $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Остается проверить, будет ли

функция $f(x, y)$ удовлетворять условию Липшица или более грубому условию $|\partial f/\partial y| \leq N$ в окрестности точки (x_0, y_0) , так как тогда можно будет утверждать, что уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (1.79)$$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (см. § 6, стр. 37) и, следовательно, существует единственное решение уравнения (1.79), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, а вместе с тем существует единственная интегральная кривая уравнения (1.78), проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая в ней угловой коэффициент касательной y'_0 .

Согласно известной теореме о неявных функциях можно утверждать, что при выполнении условий 1), 2), 3) производная $\partial f/\partial y$ существует и может быть вычислена по правилу дифференцирования неявных функций.

Дифференцируя тождество $F(x, y, y') = 0$ по y и принимая во внимание, что $y' = f(x, y)$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}},$$

откуда, принимая во внимание условия 2) и 3), следует, что $|\partial f/\partial y| \leq N$ в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0) .

Множество точек (x, y) , в которых нарушается единственность решений уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.78)$$

называется *особым* множеством.

В точках особого множества должно быть нарушено по крайней мере одно из условий теоремы 1.5. В дифференциальных уравнениях, встречающихся в прикладных задачах, условия 1) и 3) обычно выполняются, но условие 2) $\partial F/\partial y' \neq 0$ часто нарушается.

Если условия 1) и 3) выполнены, то в точках особого множества должны одновременно удовлетворяться уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (1.80)$$

Исключая из этих уравнений y' , получим уравнение

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (1.81)$$

которому должны удовлетворять точки особого множества. Однако не в каждой точке, удовлетворяющей уравнению (1.81), обязательно нарушается единственность решения уравнения (1.78), так как условия теоремы 1.5 лишь достаточны для единственности решения, но не являются необходимыми, и следовательно, нарушение какого-нибудь условия теоремы не обязательно влечет за собой нарушение единственности.

Итак, только среди точек кривой $\Phi(x, y) = 0$, называемой *p-дискриминантной* кривой (так как уравнения (1.80) чаще записываются в виде $F(x, y, p) = 0$ и $\partial F/\partial p = 0$), могут быть точки особого множества.

Если какая-нибудь ветвь $y = \varphi(x)$ кривой $\Phi(x, y) = 0$ принадлежит особому множеству и в то же время является интегральной кривой, то она называется *особой интегральной кривой*, а функция $y = \varphi(x)$ называется *особым решением*.

Итак, для нахождения особого решения уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.78)$$

надо найти *p-дискриминантную* кривую, определяемую уравнениями

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

выяснить путем непосредственной подстановки в уравнение (1.78), есть ли среди ветвей *p-дискриминантной* кривой интегральные кривые, и, если такие кривые есть, то еще проверить, нарушена ли в точках этих кривых единственность или нет. Если единственность нарушена, то такая ветвь *p-дискриминантной* кривой является *особой интегральной кривой*.

Пример 1. Имеет ли уравнение Лагранжа $y = 2xy' - (y')^2$ особое решение?

Условия 1) и 3) теоремы существования и единственности выполнены. *p-дискриминантная* кривая определяется уравнениями: $y = 2xp - p^2$, $2x - 2p = 0$, или, исключая p , $y = x^2$. Парабола $y = x^2$ не является интегральной кривой, так как функция $y = x^2$ не удовлетворяет исходному уравнению. Особого решения нет.

Пример 2. Найти особое решение уравнения Лагранжа

$$x - y = \frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3. \quad (1.82)$$

Условия 1) и 3) теоремы существования и единственности выполнены. p -дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$x - y = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3, \quad \frac{8}{9}(p - p^2) = 0.$$

Из второго уравнения находим $p = 0$ или $p = 1$; подставляя в первое уравнение, получим:

$$y = x \quad \text{или} \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

Лишь вторая из этих функций является решением исходного уравнения.

Для того чтобы выяснить, будет ли решение $y = x - \frac{4}{27}$ особым, надо проинтегрировать уравнение (1.82) и выяснить, проходят ли через точки прямой $y = x - \frac{4}{27}$ по направлению этой прямой другие интегральные кривые. Интегрируя уравнение Лагранжа (1.82), получим:

$$(y - c)^2 = (x - c)^3. \quad (1.83)$$

Из уравнения (1.83) и рис. 1.30 видно, что прямая $y = x - \frac{4}{27}$ является огибающей семейства полукубических парабол $(y - c)^2 = (x - c)^3$ и, следовательно, в каждой точке прямой $y = x - \frac{4}{27}$ нарушена единственность — по одному и тому же направлению проходят две интегральные кривые: прямая $y = x - \frac{4}{27}$ и касающаяся этой прямой в рассматриваемой точке полукубическая парабола.

Итак, особым решением является $y = x - \frac{4}{27}$.

В этом примере огибающая семейства интегральных кривых является особым решением.

Если огибающей семейства

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad (1.84)$$

называть кривую, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства (1.84) и каждого отрезка которой касается бесконечное множество кривых рассматриваемого семейства, то огибающая семейства интегральных кривых некоторого уравнения $F(x, y, y') = 0$ всегда будет особой интегральной кривой.

Действительно, в точках огибающей значения x , y , и y' совпадают со значениями x , y и y' для интегральной кривой, касающейся огибающей в точке (x, y) , и следовательно, в каждой точке огибающей значения x , y и y' удовлетворяют уравнению $F(x, y, y') = 0$,

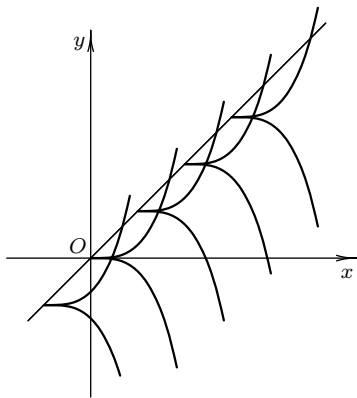


Рис. 1.30.

т.е. огибающая является интегральной кривой (рис. 1.31). В каждой точке огибающей нарушена единственность, так как через точки оги-

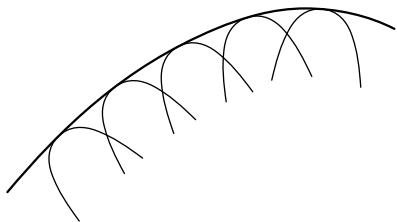


Рис. 1.31.

бающей по одному направлению проходят по крайней мере две интегральные кривые: огибающая и касающаяся ее в рассматриваемой точке интегральная кривая семейства (1.84). Следовательно, огибающая является особой интегральной кривой.

Зная семейство интегральных кривых $\Phi(x, y, c) = 0$ некоторого дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, можно определить его особые решения путем нахождения огибающей. Как известно из курса дифференциальной геометрии или из курса математического анализа, огибающая входит в состав c -дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0,$$

однако, кроме огибающей, в состав c -дискриминантной кривой могут входить и другие множества, например множество кратных точек кривых рассматриваемого семейства, в которых $\partial \Phi / \partial x = \partial \Phi / \partial y = 0$. Чтобы некоторая ветвь c -дискриминантной кривой заведомо была огибающей, достаточно, чтобы на ней:

- 1) существовали ограниченные по модулю частные производные

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \leq N_1, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \leq N_2;$$

- 2) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$ или $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$.

Заметим, что эти условия лишь достаточны, так что кривые, на которых нарушено одно из условий 1), 2), тоже могут быть огибающими.

Пример 3. Дано семейство интегральных кривых $(y - c)^2 = (x - c)^3$ некоторого дифференциального уравнения (см. пример 2). Найти особое решение того же уравнения.

Находим c -дискриминантную кривую:

$$(y - c)^2 = (x - c)^3 \quad \text{и} \quad 2(y - c) = 3(x - c)^2.$$

Исключая параметр c , получим

$$y = x \quad \text{и} \quad x - y - \frac{4}{27} = 0.$$

Прямая $y = x - \frac{4}{27}$ является огибающей, так как на ней выполнены все условия теоремы об огибающей. Функция $y = x$ не удовлетворяет дифференциальному уравнению. Прямая $y = x$ является геометрическим местом точек возврата (см. рис. 1.30). В точках этой прямой нарушено второе условие теоремы об огибающей.

Пример 4. Дано семейство интегральных кривых

$$y^{1/5} - x + c = 0 \quad (1.85)$$

некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Найти особое решение того же уравнения.

Задача сводится к нахождению огибающей рассматриваемого семейства. Если непосредственно применить указанный выше метод нахождения огибающей, то получим противоречивое уравнение $1 = 0$, откуда казалось бы

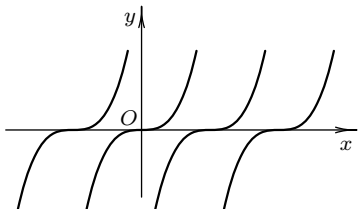


Рис. 1.32.

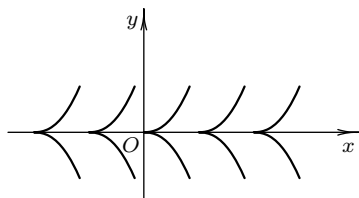


Рис. 1.33.

естественно сделать вывод, что семейство (1.85) не имеет огибающей. Однако в данном случае производная от левой части уравнения (1.85) по y , $\partial F / \partial y = \frac{1}{5} y^{-4/5}$, обращается в бесконечность при $y = 0$, и следовательно, не исключена возможность того, что $y = 0$ будет огибающей семейства (1.85), которую не удалось найти общим методом ввиду нарушения на прямой $y = 0$ условий теоремы об огибающей.

Следует преобразовать уравнение (1.85) так, чтобы для преобразованного уравнения, эквивалентного исходному, уже выполнялись условия теоремы об огибающей. Например, запишем уравнение (1.85) в виде $y - (x - c)^5 = 0$. Теперь условия теоремы об огибающей выполнены, и, применяя общий метод, получим:

$$y = (x - c)^5, \quad 5(x - c)^4 = 0,$$

или, исключая c , будем иметь уравнение огибающей $y = 0$ (рис. 1.32).

Пример 5. Дано семейство интегральных кривых

$$y^2 - (x - c)^3 = 0 \quad (1.86)$$

некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Найти особое решение того же уравнения.

c -дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$y^2 - (x - c)^3 = 0 \quad \text{и} \quad x - c = 0,$$

или, исключая c , получим $y = 0$. На прямой $y = 0$ обращаются в нуль обе частные производные $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$ от левой части уравнения (1.86), следовательно, $y = 0$ является геометрическим местом кратных точек кривых семейства (1.86), в данном случае точек возврата. Однако это геометрическое место точек возврата в рассматриваемом примере является одновременно и огибающей. На рис. 1.33 изображены полукубические параболы (1.86) и их огибающая $y = 0$.

Задачи к главе 1

1. $\operatorname{tg} y \, dx - \operatorname{ctg} x \, dy = 0$.
2. $(12x + 5y - 9) \, dx + (5x + 2y - 3) \, dy = 0$.
3. $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $x \frac{dy}{dx} + y = x^3$.
5. $y \, dx - x \, dy = x^2 y \, dy$.
6. $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$.
7. $y \sin x + y' \cos x = 1$.
8. $y' = e^{x-y}$.
9. $\frac{dx}{dt} = x + \sin t$.
10. $x(\ln x - \ln y) \, dy - y \, dx = 0$.
11. $xy(y')^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$.
12. $(y')^2 = 9y^4$.
13. $\frac{dx}{dt} = e^{x/t} + \frac{x}{t}$.
14. $x^2 + (y')^2 = 1$.
15. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.
16. $x = (y')^3 - y' + 2$.
17. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3}$.
18. $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$.

19. Найти ортогональные траектории семейства $xy = c$, т. е. найти линии, ортогонально пересекающие кривые указанного семейства.

20. Найти кривую, у которой подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

21. Найти кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

22. Найти ортогональные траектории семейства

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

23. Считая, что скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурами тела и воздуха, решить следующую задачу: если температура воздуха равна 20°C и тело в течение 20 мин. охлаждается от 100 до 60°C , то в течение какого времени температура тела достигнет 30°C ?

24. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 км/час . На полном ходу ее мотор был выключен и через $t = 20$ сек скорость лодки

уменьшилась до $v_1 = 6$ км/час. Определить скорость лодки через 2 мин. после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

25. Найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из заданной точки.

26. $y'^2 + y^2 = 4$.

27. Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания на равные части.

28. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x - 4}{2x - y + 5}$.

29. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1+x} + y^2 = 0$.

30. Численно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Определить $y(0,5)$ с точностью до 0,01.

31. Численно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = xy^3 + x^2, \quad y(0) = 0.$$

Определить $y(0,6)$ с точностью до 0,01.

32. $y' = 1,31x - 0,2y^2$, $y(0) = 2$. Составить таблицу пятнадцати значений y с шагом $h = 0,02$.

33. $y = 2xy' - y'^2$.

34. $\frac{dy}{dx} \cos(x - y)$.

35. Пользуясь методом изоклин (см. стр. 12), сделать набросок семейства интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2.$$

36. $(2x + 2y - 1) dx + (x + y - 2) dy = 0$.

37. $y'^3 - y'e^{2x} = 0$.

38. Найти ортогональные траектории парабол $y^2 + 2ax = a^2$.

39. Имеет ли дифференциальное уравнение $y = 5xy' - (y')^2$ особое решение?

40. Приближенно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2, \quad y(1) = 0$$

методом последовательных приближений (определить y_1 и y_2).

$$41. y = x^2 + \int_1^x \frac{y}{x} dx.$$

$$42. \text{ Имеет ли уравнение } y' = \sqrt[3]{x-5y} + 2 \text{ особое решение?}$$

$$43. (x-y)y dx - x^2 dy = 0.$$

$$44. \text{ Найти ортогональные траектории семейства } y^2 = cx^3.$$

$$45. \dot{x} + 5x = 10t + 2 \text{ при } t = 1, x = 2.$$

$$46. \dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^3} \text{ при } t = 2, x = 4.$$

$$47. y = xy' + y'^2 \text{ при } x = 2, y = -1.$$

$$48. y = xy' + y'^2 \text{ при } x = 1, y = -1.$$

$$49. \frac{dy}{dx} = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}.$$

$$52. y' - \frac{3y}{x} + x^3 y^2 = 0.$$

$$50. \dot{x} - x \operatorname{ctg} t = 4 \sin t.$$

$$53. y(1+y'^2) = a.$$

$$51. y = x^2 + 2y'x + \frac{y'^2}{2}.$$

$$54. (x^2 - y) dx + (x^2 y^2 + x) dy = 0.$$

55. Найти интегрирующий множитель уравнения

$$(3y^2 - x) dx + 2y(y^2 - 3x) dy = 0,$$

имеющий вид $\mu = \mu(x + y^2)$.

$$56. (x-y)y dx - x^2 dy = 0.$$

$$57. y' = \frac{x+y-3}{1-x+y}.$$

$$58. xy' - y^2 \ln x + y = 0.$$

$$59. (x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0.$$

$$60. (4y + 2x + 3)y' - 2y - x - 1 = 0.$$

$$61. (y^2 - x)y' - y + x^2 = 0.$$

$$62. (y^2 - x^2)y' + 2xy = 0.$$

$$63. 3xy^2 y' + y^3 - 2x = 0.$$

$$64. (y')^2 + (x+a)y' - y = 0, \text{ где } a \text{ — постоянная.}$$

$$65. (y')^2 - 2xy' + y = 0.$$

$$66. (y')^2 + 2yy' \operatorname{ctg} x - y^2 = 0.$$

ГЛАВА 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

§ 1. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения n -го порядка

Дифференциальные уравнения n -го порядка имеют вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.1)$$

или, если они не разрешены относительно старшей производной,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Теорема существования и единственности для уравнения n -го порядка легко может быть получена путем сведения его к системе уравнений, для которой на стр. 48 теорема существования и единственности уже была доказана.

Действительно, если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ неизвестными функциями считать не только y , но и $y' = y_1$, $y'' = y_2, \dots$, $y^{(n-1)} = y_{n-1}$, то уравнение (2.1) заменяется системой

$$\left. \begin{array}{l} y' = y_1, \\ y'_1 = y_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y'_{n-2} = y_{n-1}, \\ y'_{n-1} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}), \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

после чего уже можно применить теорему о существовании и единственности решения системы уравнений (см. стр. 48), согласно которой, если правые части всех уравнений системы (2.2) непрерывны в рассматриваемой области и удовлетворяют условию Липшица

по всем аргументам, кроме x , то существует единственное решение системы (2.2), удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y_{10}, \quad \dots, \quad y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}.$$

Правые части первых $n - 1$ уравнений (2.2) непрерывны и удовлетворяют не только условию Липшица, но даже более грубому условию существования ограниченных производных по $y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Следовательно, условия теоремы существования и единственности будут выполнены, если правая часть последнего уравнения $y'_{n-1} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ будет непрерывна в окрестности начальных значений и будет удовлетворять условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, или более грубому условию существования ограниченных частных производных по всем аргументам, начиная со второго.

Итак, возвращаясь к прежним переменным x и y , окончательно получаем следующую теорему существования и единственности:

Теорема 2.1. *Существует единственное решение дифференциального уравнения n -го порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0,$$

если в окрестности начальных значений $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$ функция f является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Последнее условие может быть заменено более грубым условием существования в той же окрестности ограниченных частных производных первого порядка от функции f по всем аргументам, начиная со второго.

Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка называется множество решений, состоящее из всех без исключения частных решений. Если правая часть уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

в некоторой области изменения аргументов удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, то общее решение уравнения (2.1) зависит от n параметров, в качестве которых могут быть выбраны, например, начальные значения искомой функции и ее производных $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0$. В частности, общее решение уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ зависит от двух параметров, например

от y_0 и y'_0 . Если же фиксировать y_0 и y'_0 , т. е. задать точку (x_0, y_0) и направление касательной к искомой интегральной кривой в этой точке, то при выполнении условий теоремы существования и единственности этими условиями определяется единственная интегральная кривая.

Например, в уравнении движения материальной точки массы m по прямой под действием силы $f(t, x, \dot{x})$:

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}),$$

задание начального положения точки $x(t_0) = x_0$ и начальной скорости $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ определит единственное решение, единственный закон движения $x = x(t)$, если, конечно, функция f удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Теорема о непрерывной зависимости решения от параметров и от начальных значений, рассмотренная на стр. 51, без изменения метода доказательства переносится на системы дифференциальных уравнений, а следовательно, и на уравнения n -го порядка.

§ 2. Простейшие случаи понижения порядка

В некоторых случаях порядок дифференциального уравнения может быть понижен, что обычно облегчает его интегрирование.

Укажем несколько наиболее часто встречающихся классов уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.3)$$

В этом случае порядок уравнения может быть снижен до $n-k$ заменой переменных $y^{(k)} = p$.

Действительно, после замены переменных уравнение (2.3) принимает вид

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Из этого уравнения определяется $p = p(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$, а y находим из $y^{(k)} = p(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ k -кратным интегрированием. В частности, если уравнение второго порядка не содержит y , то замена переменных $y' = p$ приводит к уравнению первого порядка.

Пример 1.

$$\frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Полагая $d^4y/dx^4 = p$, получаем $dp/dx - (1/x)p = 0$; разделяя переменные и интегрируя, будем иметь: $\ln |p| = \ln |x| + \ln c$, или $p = cx$, $d^4y/dx^4 = cx$, откуда

$$y = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5.$$

Пример 2. Найти закон движения тела, падающего в воздухе без начальной скорости, считая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости.

Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

где s — пройденный телом путь, m — масса тела, t — время. При $t = 0$ будет $s = 0$ и $ds/dt = 0$.

Уравнение не содержит явно неизвестной функции s , следовательно, можно понизить порядок уравнения, считая $ds/dt = v$. При этом уравнение движения примет вид

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{m dv}{mg - kv^2} = dt; \quad t = m \int_0^v \frac{dv}{mg - kv^2} = \frac{1}{k\sqrt{g}} \operatorname{Arth} \frac{kv}{\sqrt{g}},$$

откуда $v = (\sqrt{g}/k) \operatorname{th}(k\sqrt{g}t)$; умножая на dt и интегрируя еще раз, найдем закон движения:

$$s = \frac{1}{k^2} \ln \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t).$$

2. Уравнение не содержит независимого переменного:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу подстановкой $y' = p$, причем p рассматривается как новая неизвестная функция y , $p = p(y)$, и следовательно, все производные $d^k y/dx^k$ надо выразить через производные от новой неизвестной функции $p(y)$ по y :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} \cdot p \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dp}{dy} \cdot p \right) \frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2} \cdot p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p \end{aligned}$$

и аналогично для производных более высокого порядка. При этом очевидно, что производные $d^k y/dx^k$ выражаются через производные порядка не выше $k-1$ от p по y , что и приводит к понижению порядка на единицу.

В частности, если уравнение второго порядка не содержит независимого переменного, то указанная замена переменных приводит к уравнению первого порядка.

Пример 3.

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

Полагая $dy/dx = p$, $d^2 y/dx^2 = p \cdot dp/dy$, получим уравнение с разделяющимися переменными $yp \cdot dp/dy - p^2 = 0$, общее решение которого $p = c_1 y$ или $dy/dx = c_1 y$. Снова разделяя переменные и интегрируя, получим $\ln |y| = c_1 x + \ln c_2$ или $y = c_2 e^{c_1 x}$.

Пример 4. Проинтегрировать уравнение математического маятника $\ddot{x} + a^2 \sin x = 0$ при начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Понижаем порядок, полагая

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \ddot{x} = v \frac{dv}{dx}, \quad v dv = -a^2 \sin x dx, \\ \frac{v^2}{2} &= a^2 (\cos x - \cos x_0), \quad v = \pm a \sqrt{2(\cos x - \cos x_0)}, \\ \frac{dx}{dt} &= \pm a \sqrt{2(\cos x - \cos x_0)}, \quad t = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}}. \end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в правой части, не берется в элементарных функциях, но легко сводится к эллиптическим функциям.

3. Левая часть уравнения

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.4)$$

является производной некоторого дифференциального выражения $(n-1)$ -го порядка $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

В этом случае легко находим так называемый *первый интеграл*, т.е. дифференциальное уравнение $(n-1)$ -го порядка, содержащее одну произвольную постоянную, эквивалентное данному уравнению n -го порядка, и тем самым понижаем порядок уравнения на единицу. Действительно, уравнение (2.4) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0. \quad (2.4_1)$$

Если $y(x)$ является решением уравнения (2.4₁), то производная функции $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ тождественно равна нулю. Следовательно, функция $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ равна постоянной, и мы получаем первый интеграл

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c.$$

Пример 5.

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде $d(yy') = 0$, откуда $yy' = c_1$ или $y dy = c_1 dx$. Следовательно, общим интегралом является $y^2 = c_1 x + c_2$.

Иногда левая часть уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ становится производной дифференциального выражения $(n-1)$ -го порядка $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ лишь после умножения на некоторый множитель $\mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Пример 6.

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

Умножая на множитель $\mu = (1/y^2)$, получим $(yy'' - (y')^2)/y^2 = 0$ или $d/dx (y'/y) = 0$, откуда $y'/y = c_1$, или $d/dx (\ln |y|) = c_1$. Следовательно, $\ln |y| = c_1 x + \ln c_2$, $c_2 > 0$, откуда $y = c_2 e^{c_1 x}$, $c_2 \neq 0$, как и в примере 3 этого параграфа.

Замечание. При умножении на множитель $\mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ могут быть введены лишние решения, обращающие этот множитель в нуль. Если множитель μ разрывен, то возможна и потеря решений. В примере 6 при умножении на $\mu = (1/y^2)$ было потеряно решение $y = 0$, которое, однако, можно включить в полученное решение $y = \bar{c}_2 e^{c_1 x}$, если считать, что \bar{c}_2 может принимать значение 0.

4. Уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ однородно относительно аргументов $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Порядок однородного относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$ уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.5)$$

т. е. уравнения, для которого справедливо тождество

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

может быть понижен на единицу подстановкой $y = e^{\int z dx}$, где z — но-

вая неизвестная функция. Действительно, дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} y' &= e^{\int z \, dx} z, \\ y'' &= e^{\int z \, dx} (z^2 + z'), \\ y''' &= e^{\int z \, dx} (z^3 + 3zz' + z''), \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(k)} &= e^{\int z \, dx} \Phi(z, z', z'', \dots, z^{(k-1)}) \end{aligned}$$

(убедиться в справедливости этого равенства можно методом индукции).

Подставляя в (2.5) и замечая, что, в силу однородности, множитель $e^{p \int z \, dx}$ можно вынести за знак функции F , получим

$$e^{p \int z \, dx} f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

или, сокращая на $e^{p \int z \, dx}$, будем иметь

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Пример 7.

$$yy'' - (y')^2 = 6xy^2.$$

Полагая $y = e^{\int z \, dx}$, получим $z' = 6x$, $z = 3x^2 + c_1$, $y = e^{\int (3x^2 + c_1) \, dx}$ или $y = c_2 e^{(x^3 + c_1 x)}$.

Особенно часто в приложениях встречаются дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка.

$$1) \quad F(x, y'') = 0. \quad (2.6)$$

В этом уравнении можно понизить порядок подстановкой $y' = p$ и свести его к уравнению $F(x, dp/dx) = 0$, рассмотренному на стр. 66.

Можно разрешить уравнение (2.6) относительно второго аргумента $y'' = f(x)$ и два раза проинтегрировать или ввести параметр и заменить уравнение (2.6) его параметрическим представлением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(t), \quad x = \psi(t),$$

откуда

$$\begin{aligned} dy' &= y'' \, dx = \varphi(t) \psi'(t) \, dt, \quad y' = \int \varphi(t) \psi'(t) \, dt + c_1, \\ dy &= y' \, dx, \quad y = \int \left[\int \varphi(t) \psi'(t) \, dt + c_1 \right] \psi'(t) \, dt + c_2. \end{aligned}$$

$$2) \quad F(y', y'') = 0. \quad (2.7)$$

Полагая $y' = p$, преобразуем (2.7) к уравнению (1.61) [стр. 67], или представим уравнение (2.7) в параметрическом виде:

$$y'_x = \varphi(t), \quad y''_{xx} = \psi(t),$$

откуда

$$dx = \frac{dy'}{y''} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}, \quad x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + c_1$$

после чего y определяется квадратурой:

$$dy = y' dx = \varphi(t) \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt, \quad y = \int \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + c_2.$$

$$3) \quad F(y, y'') = 0. \quad (2.8)$$

Можно понизить порядок, полагая

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Если уравнение (2.8) легко разрешимо относительно второго аргумента $y'' = f(y)$, то, умножая это уравнение почленно на $2y' dx = 2 dy$, получим $d(y')^2 = 2f(y) dy$, откуда

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}, \quad \pm \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}} = dx, \\ x + c_2 &= \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}}. \end{aligned}$$

Можно уравнение (2.8) заменить его параметрическим представлением $y = \varphi(t)$, $y'' = \psi(t)$; тогда из $dy' = y'' dx$ и $dy = y' dx$ получим $y' dy' = y'' dy$ или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d(y')^2 &= \psi(t) \varphi'(t) dt, \\ (y')^2 &= 2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1, \\ y' &= \pm \sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1}, \end{aligned}$$

после чего из $dy = y' dx$ находим dx , а затем и x :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t) dt}{\pm \sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1}}, \\ x &= \pm \int \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1}} + c_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) и $y = \varphi(t)$ и определяют в параметрическом виде семейство интегральных кривых.

Пример 8.

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Умножая обе части уравнения на $2y' dx$, получим $d(y')^2 = 4y^3 dy$, откуда $(y')^2 = y^4 + c_1$. Принимая во внимание начальные условия, находим, что $c_1 = 0$ и $y' = y^2$. Следовательно, $dy/y^2 = dx$, $-(1/y) = x + c_2$, $c_2 = -1$, $y = 1/(1 - x)$.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных и, следовательно, имеющее вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \varphi(x). \quad (2.10)$$

Если правая часть $\varphi(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, так как оно однородно относительно неизвестной функции y и ее производных.

Если коэффициент $a_0(x)$ не равен нулю ни в одной точке некоторого отрезка $a \leq x \leq b$, то, разделив на $a_0(x)$, приведем линейное однородное уравнение при x , изменяющемся на этом отрезке, к виду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2.11)$$

или

$$y^{(n)} = - \sum_{i=1}^n p_i(x)y^{(n-i)}. \quad (2.11_1)$$

Если коэффициенты $p_i(x)$ непрерывны на отрезке $a \leq x \leq b$, то в окрестности любых начальных значений

$$y(x_0) = y_0, \quad y'_0(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где x_0 — любая точка интервала $a < x < b$, удовлетворяются условия теоремы существования и единственности.

Действительно, правая часть уравнения (2.11₁) непрерывна по совокупности всех аргументов и существуют ограниченные по модулю частные производные $\partial f / \partial y^{(k)} = -p_{n-k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots, (n-1)$), так как функции $p_{n-k}(x)$ непрерывны на отрезке $a \leq x \leq b$ и, следовательно, ограничены по модулю.

Заметим, что линейность и однородность уравнения сохраняются при любом преобразовании независимого переменного $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — произвольная n раз дифференцируемая функция, производная которой $\varphi'(t) \neq 0$ на рассматриваемом отрезке изменения t .

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{[\varphi'(t)]^2} - \frac{dy}{dt} \frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Производная любого порядка $d^k y / dx^k$ является линейной однородной функцией производных dy/dt , d^2y/dt^2 , ..., $d^k y/dt^k$, и следовательно, при подстановке в уравнение (2.11) его линейность и однородность сохраняются.

Линейность и однородность сохраняются также при линейном однородном преобразовании неизвестной функции $y(x) = \alpha(x)z(x)$. Действительно, по формуле дифференцирования произведения

$$y^{(k)} = \alpha(x)z^{(k)} + k\alpha'(x)z^{(k-1)} + \frac{k(k-1)}{2!}\alpha''(x)z^{(k-2)} + \dots + \alpha^{(k)}(x)z,$$

т. е. производная $y^{(k)}$ является линейной однородной функцией z , z' , z'' , ..., $z^{(k)}$. Следовательно, левая часть линейного однородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

после замены переменных будет линейной однородной функцией z , z' , ..., $z^{(n)}$.

Запишем линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

кратко в виде

$$L[y] = 0,$$

где

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y.$$

Будем называть $L[y]$ *линейным дифференциальным оператором*.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими двумя основными свойствами:

1) *Постоянный множитель выносится за знак линейного оператора:*

$$L[cy] \equiv cL[y].$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (cy)^{(n)} + p_1(x)(cy)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)(cy) \\ \equiv c[y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y]. \end{aligned}$$

2) *Линейный дифференциальный оператор, примененный к сумме двух функций y_1 и y_2 , равен сумме результатов применения того же оператора к каждой функции в отдельности:*

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2].$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)(y_1 + y_2) \\ \equiv [y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_1] \\ + [y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_2]. \end{aligned}$$

Следствием свойств 1) и 2) является

$$L\left[\sum_{i=1}^m c_i y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^m c_i L[y_i],$$

где c_i — постоянные.

Опираясь на свойства линейного оператора L , докажем ряд теорем о решениях линейного однородного уравнения.

Теорема 2.2. *Если y_1 является решением линейного однородного уравнения $L[y] = 0$, то и cy_1 , где c — произвольная постоянная, является решением того же уравнения.*

Доказательство. Дано $L[y_1] \equiv 0$. Надо доказать, что $L[cy_1] \equiv 0$.

Пользуясь свойством 1) оператора L , получим

$$L[cy_1] \equiv cL[y_1] \equiv 0.$$

Теорема 2.3. Сумма $y_1 + y_2$ решений y_1 и y_2 линейного однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением того же уравнения.

Доказательство. Дано $L[y_1] \equiv 0$ и $L[y_2] \equiv 0$. Надо доказать, что $L[y_1 + y_2] \equiv 0$.

Пользуясь свойством 2) оператора L , получим:

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2] \equiv 0.$$

Следствие теорем 2.2 и 2.3. Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами $\sum_{i=1}^m c_i y_i$ решений y_1, y_2, \dots, y_m линейного однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением того же уравнения.

Теорема 2.4. Если линейное однородное уравнение $L[y] = 0$ с действительными коэффициентами $p_i(x)$ имеет комплексное решение $y(x) = u(x) + iv(x)$, то действительная часть этого решения $u(x)$ и его мнимая часть $v(x)$ в отдельности являются решениями того же однородного уравнения.

Доказательство. Дано $L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$. Надо доказать, что $L[u] \equiv 0$ и $L[v] \equiv 0$.

Пользуясь свойствами 1) и 2) оператора L , получим:

$$L[u + iv] \equiv L[u] + iL[v] \equiv 0,$$

откуда $L[u] \equiv 0$ и $L[v] \equiv 0$, так как комплексная функция действительного переменного обращается тождественно в нуль тогда и только тогда, когда ее действительная и мнимая части тождественно равны нулю.

Замечание. Мы применили свойства 1) и 2) оператора L к комплексной функции $u(x) + iv(x)$ действительного переменного, что, очевидно, допустимо, так как при доказательстве свойств 1) и 2) были использованы лишь следующие свойства производных $(cy)' = cy'$, где c — постоянная, и $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$, остающиеся справедливыми и для комплексных функций действительного переменного.

Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на некотором отрезке изменения x , $a \leq x \leq b$, если существуют постоянные величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что на том же отрезке

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0, \quad (2.12)$$

причем хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$. Если же тождество (2.12) справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то функции y_1, y_2, \dots, y_n называются *линейно независимыми* на отрезке $a \leq x \leq b$.

Пример 1. Функции $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы на любом отрезке $a \leq x \leq b$, так как тождество

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^n \equiv 0 \quad (2.13)$$

возможно лишь, если все $\alpha_i = 0$. Если бы хоть одно $\alpha_i \neq 0$, то в левой части тождества (2.13) стоял бы многочлен степени не выше n , который может иметь не более n различных корней и, следовательно, обращается в нуль не более чем в n точках рассматриваемого отрезка.

Пример 2. Функции $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, линейно независимы на любом отрезке $a \leq x \leq b$.

Допустим, что рассматриваемые функции линейно зависимы. Тогда

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \dots + \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0, \quad (2.14)$$

где хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$, например для определенности $\alpha_n \neq 0$. Разделив тождество (2.14) на $e^{k_1 x}$ и продифференцировав, получим:

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \dots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} \equiv 0 \quad (2.15)$$

— линейную зависимость между $n-1$ показательными функциями вида $e^{p x}$ с различными показателями. Деля тождество (2.15) на $e^{(k_2 - k_1)x}$ и дифференцируя, получим линейную зависимость между $n-2$ показательными функциями с различными показателями. Продолжая этот процесс $n-1$ раз, получим

$$\alpha_n (k_n - k_1)(k_n - k_2) \dots (k_n - k_{n-1}) e^{(k_n - k_{n-1})x} \equiv 0,$$

что невозможно, так как α_n , по предположению, отлично от нуля, а $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Доказательство остается справедливым при комплексных k_i .

Пример 3. Функции

$$\begin{array}{ccccccc} e^{k_1 x}, & x e^{k_1 x}, & \dots, & x^{n_1} e^{k_1 x}, \\ e^{k_2 x}, & x e^{k_2 x}, & \dots, & x^{n_2} e^{k_2 x}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{k_p x}, & x e^{k_p x}, & \dots, & x^{n_p} e^{k_p x}, \end{array}$$

где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, линейно независимы на любом отрезке $a \leq x \leq b$.

Допустим, что эти функции линейно зависимы. Тогда

$$P_1(x) e^{k_1 x} + P_2(x) e^{k_2 x} + \dots + P_p(x) e^{k_p x} \equiv 0, \quad (2.16)$$

где $P_i(x)$ — многочлен степени не выше n_i , причем хотя бы один полином, например $P_p(x)$, не равен нулю тождественно. Разделим тождество (2.16)

на $e^{k_1 x}$ и продифференцируем $n_1 + 1$ раз. Тогда первое слагаемое в тождестве (2.16) исчезнет, и мы получим линейную зависимость такого же вида, но с меньшим числом функций:

$$Q_2(x)e^{(k_2-k_1)x} + \dots + Q_p(x)e^{(k_p-k_1)x} = 0. \quad (2.17)$$

При этом степени многочленов Q_i и P_i ($i = 2, 3, \dots, p$) совпадают, так как при дифференцировании произведения $P_i(x)e^{p x}$, $p \neq 0$, получим $[P_i(x)p + P_i'(x)]e^{p x}$, т. е. коэффициент при старшем члене многочлена $P_i(x)$ после дифференцирования произведения $P_i(x)e^{p x}$ приобретает лишь не равный нулю множитель p . В частности, совпадают степени многочленов $P_p(x)$ и $Q_p(x)$, и следовательно, многочлен $Q_p(x)$ не равен нулю тождественно. Деля тождество (2.17) на $e^{(k_2-k_1)x}$ и дифференцируя $n_2 + 1$ раз, получим линейную зависимость с еще меньшим числом функций. Продолжая этот процесс $p - 1$ раз, получим

$$R_p(x)e^{(k_p-k_{p-1})x} \equiv 0,$$

что невозможно, так как степень многочлена $R_p(x)$ равна степени многочлена $P_p(x)$ и, следовательно, многочлен $R_p(x)$ не равен нулю тождественно.

Доказательство не изменяется и при комплексных k_i .

Теорема 2.5. Если функции y_1, y_2, \dots, y_n линейно зависимы на отрезке $a \leq x \leq b$, то на том же отрезке определитель

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

называемый определителем Вронского¹⁾, тождественно равен нулю.

Доказательство. Дано, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0 \quad (2.18)$$

на отрезке $a \leq x \leq b$, причем не все α_i равны нулю. Дифференцируя тождество (2.18) $n - 1$ раз, получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 y_1 &+ \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n && \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1' &+ \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n' && \equiv 0, \\ \dots &\dots &\dots &\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} &+ \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} && \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

¹⁾ По имени польского математика Г. Вронского (1775–1853).

начальным условиям (2.22) удовлетворяет только это решение. Следовательно, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ и решения y_1, y_2, \dots, y_n , вопреки условию теоремы, линейно зависимы.

Замечание 1. Из теорем 2.5 и 2.6 следует, что линейно независимые на отрезке $a \leq x \leq b$ решения y_1, y_2, \dots, y_n уравнения 2.20 линейно независимы также на любом отрезке $a_1 \leq x \leq b_1$, расположенном на отрезке $a \leq x \leq b$.

Замечание 2. В теореме 2.6 в отличие от теоремы 2.5 предполагалось, что функции y_1, y_2, \dots, y_n являются решениями линейного

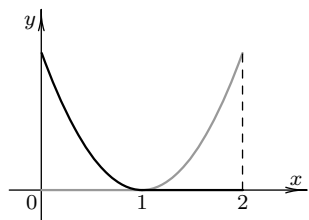


Рис. 2.1.

однородного уравнения (2.20) с непрерывными коэффициентами. Отказаться от этого требования и считать функции y_1, y_2, \dots, y_n произвольными $n-1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями нельзя. Легко привести примеры линейно независимых функций, не являющихся, конечно, решениями уравнения (2.20) с непрерывными коэффициентами, для которых определитель Вронского

не только обращается в нуль в отдельных точках, но даже тождественно равен нулю. Пусть, например, на отрезке $0 \leq x \leq 2$ определены две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(рис. 2.1).

Очевидно, $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0$ при $0 \leq x \leq 2$, так как на отрезке $0 \leq x \leq 1$ второй столбец состоит из нулей, а при $1 < x \leq 2$ из нулей состоит первый столбец. Однако функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на всем отрезке $0 \leq x \leq 2$, так как, рассматривая тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$, $0 \leq x \leq 2$, вначале на отрезке $0 \leq x \leq 1$, приходим к выводу, что $\alpha_1 = 0$, а затем, рассматривая это тождество на отрезке $1 \leq x \leq 2$, находим, что и $\alpha_2 = 0$.

Теорема 2.7. Общим решением при $a \leq x \leq b$ линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2.20)$$

с непрерывными на отрезке $a \leq x \leq b$ коэффициентами $p_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) является линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ n линейно

подчинив их выбор лишь условию

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

где x_0 — любая точка отрезка $a \leq x \leq b$. Тогда решения $y_i(x)$, определяемые начальными значениями $y_i^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$; $i = 1, 2, \dots, n$), образуют фундаментальную систему, так как их определитель Вронского $W(x)$ в точке $x = x_0$ отличен от нуля и, следовательно, на основании теорем 2.5 и 2.6 решения y_1, y_2, \dots, y_n линейно независимы.

Пример 4. Уравнение $y'' - y = 0$ имеет очевидные линейно независимые частные решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ (см. пример 2 [стр. 95]), следовательно, общее решение имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Пример 5. Решение $y = c_1 e^x + c_2 \operatorname{ch} x + c_3 \operatorname{sh} x$ уравнения $y''' - y' = 0$ не является общим решением, так как решения $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ линейно зависимы. Линейно независимыми решениями являются 1, $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$, и следовательно,

$$y = c_1 + c_2 \operatorname{ch} x + c_3 \operatorname{sh} x,$$

где c_1, c_2 и c_3 — произвольные постоянные, будет общим решением рассматриваемого уравнения.

Зная одно нетривиальное частное решение y_1 линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (2.20)$$

можно подстановкой $y = y_1 \int u dx$ понизить порядок уравнения, сохранив его линейность и однородность.

Действительно, подстановку $y = y_1 \int u dx$ можно заменить двумя подстановками: $y = y_1 z$ и $z' = u$. Линейное однородное преобразование

$$y = y_1 z \quad (2.23)$$

сохраняет линейность и однородность уравнения, следовательно, уравнение (2.20) преобразуется при этом к виду

$$a_0(x)z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = 0, \quad (2.24)$$

причем решению $y = y_1$ уравнения (2.20) в силу (2.23) соответствует решение $z \equiv 1$ уравнения (2.24). Подставляя $z \equiv 1$ в уравнение (2.24), получим $a_n(x) \equiv 0$. Следовательно, уравнение (2.24) имеет вид

$$a_0(x)z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)z' = 0,$$

и подстановка $z' = u$ понижает порядок на единицу:

$$a_0(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)u = 0.$$

Заметим, что та же подстановка $y = y_1 \int u dx$, где y_1 — решение уравнения $L[y] = 0$, снижает на единицу и порядок линейного неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$, так как эта подстановка не затрагивает правой части уравнения.

Зная k линейно независимых на отрезке $a \leq x \leq b$ решений y_1, y_2, \dots, y_k линейного однородного уравнения, можно понизить его порядок до $n - k$ на том же отрезке $a \leq x \leq b$.

Действительно, понизив подстановкой $y = y_k \int u dx$ на единицу порядок уравнения

$$L[y] = 0, \quad (2.20)$$

получаем опять линейное однородное уравнение

$$a_0(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)u = 0 \quad (2.25)$$

порядка $n - 1$, причем нам известны $k - 1$ его линейно независимых решений

$$u_1 = \left(\frac{y_1}{y_k}\right)', \quad u_2 = \left(\frac{y_2}{y_k}\right)', \quad \dots, \quad u_{k-1} = \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)',$$

которые получим, подставляя в $y = y_k \int u dx$ или $u = (y/y_k)'$ последовательно $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_{k-1}$. (Заметим, что уже использованному нами для понижения порядка решению $y = y_k$ уравнения (2.20) соответствует тривиальное решение $u \equiv 0$ уравнения (2.25).)

Решения u_1, u_2, \dots, u_{k-1} линейно независимы, так как если бы между ними существовала линейная зависимость на отрезке $a \leq x \leq b$:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} \equiv 0$$

или

$$\alpha_1 \left(\frac{y_1}{y_k}\right)' + \alpha_2 \left(\frac{y_2}{y_k}\right)' + \dots + \alpha_{k-1} \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)' \equiv 0, \quad (2.26)$$

где хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$, то, умножая на dx и интегрируя тождество (2.26) в пределах от x_0 до x , где $a \leq x \leq b$, а x_0 — точка отрезка $[a, b]$, будем иметь

$$\alpha_1 \frac{y_1(x)}{y_k(x)} + \alpha_2 \frac{y_2(x)}{y_k(x)} + \cdots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x)}{y_k(x)} - \left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \cdots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)} \right] \equiv 0,$$

или, умножая на $y_k(x)$ и обозначая

$$- \left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \cdots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)} \right] = \alpha_k,$$

получим, вопреки исходному предположению, линейную зависимость между решениями y_1, y_2, \dots, y_k :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_k y_k \equiv 0,$$

где хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$. Итак, использовав одно частное решение y_k , мы понизили порядок уравнения на единицу, сохранив его линейность и однородность, причем нам известно $k - 1$ линейно независимых решений преобразованного уравнения. Следовательно, тем же методом можно снизить порядок еще на одну единицу; использовав еще одно решение и продолжая этот процесс k раз, получим линейное уравнение $n - k$ порядка.

Пример 6.

$$xy'' - xy' + y = 0. \quad (2.27)$$

Уравнение имеет очевидное частное решение $y_1 = x$. Понижая порядок подстановкой

$$y = x \int u dx, \quad y' = xu + \int u dx, \quad y'' = xu' + 2u,$$

приведем уравнение (2.27) к виду

$$x^2 u' + (2 - x)xu = 0,$$

откуда

$$\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x} dx, \quad u = c_1 \frac{e^x}{x^2}, \quad y = x \int u dx = x \left[c_1 \int \frac{e^x}{x^2} dx + c_2 \right].$$

Лемма. Два уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (2.28)$$

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \dots + q_n(x)y = 0, \quad (2.29)$$

где функции $p_i(x)$ и $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывны на отрезке $a \leq x \leq b$, имеющие общую фундаментальную систему решений y_1, y_2, \dots, y_n , совпадают, то есть $p_i(x) \equiv q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) на отрезке $a \leq x \leq b$.

Доказательство. Вычитая из (2.28) почленно (2.29), получаем новое уравнение:

$$[p_1(x) - q_1(x)]y^{(n-1)} + [p_2(x) - q_2(x)]y^{(n-2)} + \dots + [p_n(x) - q_n(x)]y = 0, \quad (2.30)$$

решениями которого являются функции y_1, y_2, \dots, y_n , удовлетворяющие одновременно уравнениям (2.28) и (2.29).

Допустим, что хотя бы один из коэффициентов уравнения (2.30) $[p_i(x) - q_i(x)]$ хотя бы в одной точке x_0 отрезка $a \leq x \leq b$ отличен от нуля. Тогда в силу непрерывности функций $p_i(x)$ и $q_i(x)$ этот коэффициент отличен от нуля в некоторой окрестности точки x_0 , и следовательно, в этой окрестности функции y_1, y_2, \dots, y_n являются линейно независимыми решениями линейного однородного уравнения (2.30) порядка не выше чем $n - 1$, что противоречит следствию теоремы 2.7. Значит, все коэффициенты уравнения (2.30)

$$p_i(x) - q_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

т.е. $p_i(x) \equiv q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) на отрезке $a \leq x \leq b$.

Итак, фундаментальная система решений y_1, y_2, \dots, y_n вполне определяет линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (2.28)$$

и следовательно, можно поставить задачу о нахождении уравнения (2.28), имеющего заданную фундаментальную систему решений

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Так как всякое решение y искомого уравнения (2.28) должно быть линейно зависимо от решений y_1, y_2, \dots, y_n , то определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n, y] = 0$. Запишем это уравнение в развернутом

виде:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n & y' \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n & y'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

или, разлагая по элементам последнего столбца,

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n]y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \dots = 0. \quad (2.31)$$

Полученное уравнение (2.31) и является искомым линейным однородным уравнением, имеющим заданную фундаментальную систему решений y_1, y_2, \dots, y_n (так как при $y = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $W[y_1, y_2, \dots, y_n, y] \equiv 0$). Разделив обе части уравнения (2.31) на отличный от нуля коэффициент $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ при старшей производной, приведем его к виду (2.28).

Отсюда следует, в частности, что

$$p_1(x) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n]}.$$

Заметим, что определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

равен производной от определителя Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Действительно, по правилу дифференцирования определителя, производ-

ная

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

равна сумме по i от 1 до n определителей, отличающихся от определителя Вронского тем, что в них продифференцированы элементы i -й строки, а остальные строки определителя Вронского оставлены без изменения. В этой сумме только последний определитель при $i = n$, совпадающий с определителем (2.32), может быть отличен от нуля. Остальные определители равны нулю, так как их i -я и $(i+1)$ -я строки совпадают.

Следовательно, $p_1(x) = -(W'/W)$. Отсюда, умножая на dx и интегрируя, получим

$$\ln |W| = - \int p_1(x) dx + \ln c, \quad W = ce^{-\int p_1(x) dx}$$

или

$$W = ce^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}. \quad (2.33)$$

При $x = x_0$ получим $c = W(x_0)$, откуда

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}. \quad (2.34)$$

Формулы (2.33) или (2.34), впервые полученные М. В. Остроградским и независимо от него Лиувиллем, называются *формулами Остроградского – Лиувилля*.

Формула Остроградского – Лиувилля (2.34) может быть использована для интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad (2.35)$$

если известно одно нетривиальное решение этого уравнения y_1 . Согласно формуле Остроградского – Лиувилля (2.34) любое решение уравнения (2.35) должно быть также решением уравнения

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int p_1(x) dx}$$

или

$$y_1 y' - y y'_1 = c_1 e^{-\int p_1(x) dx}.$$

Для интегрирования этого линейного уравнения первого порядка проще всего воспользоваться методом интегрирующего множителя.

Умножая на $\mu = 1/y_1^2$, получим

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx},$$

откуда

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2,$$

или

$$y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx.$$

§ 4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера

1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Если в линейном однородном уравнении

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2.36)$$

все коэффициенты a_i постоянны, то его частные решения могут быть найдены в виде $y = e^{kx}$, где k — постоянная. Действительно, подставляя в уравнение (2.36) $y = e^{kx}$ и $y^{(p)} = k^p e^{kx}$ ($p = 1, 2, \dots, n$), будем иметь:

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + a_n e^{kx} = 0.$$

Сокращая на необращающийся в нуль множитель e^{kx} , получим так называемое *характеристическое уравнение*

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (2.37)$$

Это уравнение n -й степени определяет те значения k , при которых $y = e^{kx}$ является решением исходного линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (2.36). Если все корни k_1, k_2, \dots, k_n характеристического уравнения различны, то, тем самым, найдено n линейно независимых решений $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$ уравнения (2.36) (см. пример 2 [§ 3 стр. 95]). Следовательно,

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x},$$

где c_i — произвольные постоянные, является общим решением исходного уравнения (2.36). Этот метод интегрирования линейных уравнений с постоянными коэффициентами впервые был применен Эйлером.

Пример 1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 3k + 2 = 0$, его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Пример 2.

$$y''' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^3 - k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$. Общее решение рассматриваемого уравнения $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$.

Так как коэффициенты уравнения (2.36) предполагаются действительными, то комплексные корни характеристического уравнения могут появляться лишь сопряженными парами. Комплексные решения $e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)x}$, соответствующие паре комплексных сопряженных корней

$$k_1 = \alpha + \beta i \quad \text{и} \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями (см. теорему 2.4 [стр. 94]) одного из решений

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

или

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Таким образом, паре комплексных сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ соответствуют два действительных решения: $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример 3.

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 5 = 0$, его корни $k_{1,2} = -2 \pm i$. Общее решение

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Пример 4.

$$y'' + a^2 y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + a^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm ai$. Общее решение

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax.$$

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то число различных решений вида e^{kx} меньше n и, следовательно, недостающие линейно независимые решения надо искать в ином виде.

Докажем, что если характеристическое уравнение имеет корень k_i кратности α_i , то решениями исходного уравнения будет не только $e^{k_i x}$, но и $x e^{k_i x}$, $x^2 e^{k_i x}$, ..., $x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}$.

Предположим вначале, что характеристическое уравнение имеет корень $k_i = 0$ кратности α_i . Следовательно, левая часть характеристического уравнения (2.37) имеет в этом случае общий множитель k^{α_i} , т.е. коэффициенты $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-\alpha_i+1} = 0$, и характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-\alpha_i} k^{\alpha_i} = 0.$$

Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha_i} y^{(\alpha_i)} = 0,$$

очевидно, имеет частные решения $1, x, x^2, \dots, x^{\alpha_i-1}$, так как уравнение не содержит производных порядка ниже чем α_i . Итак, кратному корню $k_i = 0$ кратности α_i соответствует α_i линейно независимых (см. пример 1 [§ 3 стр. 95]) решений

$$1, x, x^2, \dots, x^{\alpha_i-1}.$$

Если характеристическое уравнение имеет корень $k_i \neq 0$ кратности α_i , то замена переменных

$$y = e^{k_i x} z \tag{2.38}$$

сводит задачу к уже рассмотренному случаю равного нулю кратного корня.

Действительно, линейное однородное преобразование неизвестной функции (2.38), как указано на стр. 92, сохраняет линейность и однородность уравнения. Постоянство коэффициентов при замене переменных (2.38) тоже сохранится, так как

$$\begin{aligned} y^{(p)} &= (ze^{k_i x})^{(p)} \\ &= e^{k_i x} \left(z^{(p)} + pz^{(p-1)}k_i + \frac{p(p-1)}{2!} z^{(p-2)}k_i^2 + \dots + zk_i^p \right), \end{aligned}$$

и после подстановки в уравнение (2.36) и сокращения на $e^{k_i x}$ при $z, z', \dots, z^{(n)}$ остаются лишь постоянные коэффициенты.

Итак, преобразованное уравнение будет линейным однородным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = 0, \tag{2.39}$$

причем корни характеристического уравнения

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.37)$$

отличаются от корней характеристического уравнения для преобразованного уравнения (2.39)

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n = 0 \quad (2.40)$$

на слагаемое k_i , так как между решениями $y = e^{kx}$ уравнения (2.36) и $z = e^{px}$ уравнения (2.39) должна быть зависимость $y = ze^{k_i x}$ или $e^{kx} = e^{px} e^{k_i x}$, откуда $k = p + k_i$. Следовательно, корню $k = k_i$ уравнения (2.37) соответствует корень $p_i = 0$ уравнения (2.40).

Как нетрудно проверить, при этом соответствии сохранится и кратность корня, т. е. корень $p_i = 0$ будет иметь кратность α_i .

Действительно, кратный корень k_i уравнения (2.37) можно рассматривать как результат совпадения различных корней этого уравнения при изменении его коэффициентов, но тогда в силу зависимости $k = p + k_i$ совпадут с $p = 0$ и α_i корней уравнения (2.40).

Корню $p = 0$ кратности α_i соответствуют частные решения $z = 1$, $z = x$, ..., $z = x^{\alpha_i - 1}$. Следовательно, в силу зависимости $y = ze^{k_i x}$, корню k_i кратности α_i уравнения (2.37) будут соответствовать α_i частных решений

$$y = e^{k_i x}, \quad y = x e^{k_i x}, \quad \dots, \quad y = x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}. \quad (2.41)$$

Остается показать, что решения

$$e^{k_i x}, \quad x e^{k_i x}, \quad \dots, \quad x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.42)$$

где m — число различных корней k_i характеристического уравнения, линейно независимы, но это уже было доказано в примере 3 [§ 3 стр. 95].

Следовательно, общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^m (c_{0i} + c_{1i}x + c_{2i}x^2 + \dots + c_{\alpha_i - 1, i}x^{\alpha_i - 1}) e^{k_i x},$$

где c_{si} — произвольные постоянные.

Пример 5.

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ или $(k - 1)^3 = 0$ имеет трехкратный корень $k_{1,2,3} = 1$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x.$$

Если характеристическое уравнение имеет кратный комплексный корень $p + qi$ кратности α , то соответствующие ему решения

$$e^{(p+qi)x}, \quad xe^{(p+qi)x}, \quad x^2e^{(p+qi)x}, \quad \dots, \quad x^{\alpha-1}e^{(p+qi)x}$$

можно преобразовать по формулам Эйлера

$$e^{(p+qi)x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$$

и, отделяя действительную и мнимую части, получить 2α действительных решений:

$$\left. \begin{aligned} e^{px} \cos qx, \quad xe^{px} \cos qx, \quad x^2e^{px} \cos qx, \quad \dots, \quad x^{\alpha-1}e^{px} \cos qx, \\ e^{px} \sin qx, \quad xe^{px} \sin qx, \quad x^2e^{px} \sin qx, \quad \dots, \quad x^{\alpha-1}e^{px} \sin qx. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Взяв действительные и мнимые части решений, соответствующих сопряженному корню $p - qi$ характеристического уравнения, мы не получим новых линейно независимых решений. Таким образом, паре комплексных сопряженных корней $p \pm qi$ кратности α соответствуют 2α линейно независимых действительных решений (2.43).

Пример 6.

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ или $(k^2 + 1)^2 = 0$ имеет двукратные корни $\pm i$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4x) \sin x.$$

2. Уравнения Эйлера. Уравнения вида

$$a_0x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0, \quad (2.44)$$

где все a_i — постоянные, называются *уравнениями Эйлера*. Уравнение Эйлера заменой независимого переменного $x = e^t$ преобразуется в линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Действительно, как указано на стр. 92, линейность и однородность уравнения при преобразовании независимого переменного сохраняются, а коэффициенты становятся постоянными, потому что

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} e^{-t}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^k y}{dx^k} &= e^{-kt} \left(\beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + \beta_k \frac{d^k y}{dt^k} \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

²⁾ Или $x = -e^t$, если $x < 0$; в дальнейшем для определенности будем считать $x > 0$.

где все β_i — постоянные, и при подстановке в уравнение (2.44) множители e^{-kt} сокращаются с множителями $x^k = e^{kt}$.

Справедливость равенства (2.45) легко может быть доказана методом индукции. Действительно, допустив, что равенство (2.45) справедливо, и продифференцировав его еще раз по x , докажем справедливость равенства (2.45) и для $(d^{k+1}y/dx^{k+1})$:

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} &= e^{-(k+1)t} \left(\beta_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^3y}{dt^3} + \cdots + \beta_k \frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}} \right) \\ &\quad - k e^{-(k+1)t} \left(\beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + \beta_k \frac{d^k y}{dt^k} \right) \\ &= e^{-(k+1)t} \left(\gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + \gamma_{k+1} \frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}} \right), \end{aligned}$$

где все γ_i — постоянные.

Итак, справедливость формулы (2.45) доказана, и следовательно, линейно входящие в уравнение Эйлера

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \quad (2.44')$$

с постоянными коэффициентами произведения

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \cdots + \beta_k \frac{d^k y}{dt^k}$$

линейно (с постоянными коэффициентами) выражаются через производные функции y по новой независимой переменной t . Отсюда следует, что преобразованное уравнение будет линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0. \quad (2.46)$$

Вместо того чтобы преобразовывать уравнение Эйлера в линейное уравнение с постоянными коэффициентами, частные решения которого имеют вид $y = e^{kt}$, можно сразу искать решения исходного уравнения в виде $y = x^k$, так как

$$e^{kt} = x^k.$$

Получающееся при этом после сокращения на x^k уравнение

$$a_0 k(k-1) \dots (k-n+1) + a_1 k(k-1) \dots (k-n+2) + \cdots + a_n = 0 \quad (2.47)$$

для определения k должно совпадать с характеристическим уравнением для преобразованного уравнения (2.46). Следовательно, корням k_i уравнения (2.47) кратности α_i соответствуют решения

$$e^{k_i t}, \quad t e^{k_i t}, \quad t^2 e^{k_i t}, \quad \dots, \quad t^{\alpha_i - 1} e^{k_i t}$$

преобразованного уравнения или

$$x^{k_i}, \quad x^{k_i} \ln x, \quad x^{k_i} \ln^2 x, \quad \dots, \quad x^{k_i} \ln^{\alpha_i - 1} x$$

исходного уравнения, а комплексным сопряженным корням $p \pm qi$ уравнения (2.47) кратности α соответствуют решения

$$\begin{aligned} e^{pt} \cos qt, \quad t e^{pt} \cos qt, \quad \dots, \quad t^{\alpha-1} e^{pt} \cos qt, \\ e^{pt} \sin qt, \quad t e^{pt} \sin qt, \quad \dots, \quad t^{\alpha-1} e^{pt} \sin qt \end{aligned}$$

преобразованного уравнения или

$$\begin{aligned} x^p \cos(q \ln x), \quad x^p \ln x \cos(q \ln x), \quad \dots, \quad x^p \ln^{\alpha-1} x \cos(q \ln x), \\ x^p \sin(q \ln x), \quad x^p \ln x \sin(q \ln x), \quad \dots, \quad x^p \ln^{\alpha-1} x \sin(q \ln x) \end{aligned}$$

исходного уравнения Эйлера.

Пример 7.

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 0.$$

Ищем решение в виде $y = x^k$; $k(k-1) + \frac{5}{2}k - 1 = 0$, откуда $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = -2$. Следовательно, общее решение при $x > 0$ имеет вид

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-2}.$$

Пример 8.

$$x^2 y'' - x y' + y = 0.$$

Ищем решение в виде $y = x^k$; $k(k-1) - k + 1 = 0$, или $(k-1)^2 = 0$, $k_{1,2} = 1$. Следовательно, общее решение при $x > 0$ будет

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x.$$

Пример 9.

$$x^2 y'' + x y' + y = 0.$$

Ищем решение в виде $y = x^k$; $k(k-1) + k + 1 = 0$, откуда $k_{1,2} = \pm i$. Следовательно, общее решение при $x > 0$ имеет вид

$$y = c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x.$$

Уравнения вида

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0 \quad (2.48)$$

также называются *уравнениями Эйлера* и сводятся к уравнению (2.44) заменой независимого переменного $ax + b = x_1$. Следовательно, частные решения этого уравнения можно искать в виде $y = (ax + b)^k$ или преобразовать уравнение (2.48) к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами заменой переменных $ax + b = e^t$ (или $ax + b = -e^t$, если $ax + b < 0$).

§ 5. Линейные неоднородные уравнения

Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = \varphi(x).$$

Если $a_0(x) \neq 0$ на рассматриваемом интервале изменения x , то после деления на $a_0(x)$ получим

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x). \quad (2.49)$$

Это уравнение, сохраняя прежние обозначения, кратко запишем в виде

$$L[y] = f(x).$$

Если при $a \leq x \leq b$ в уравнении (2.49) все коэффициенты $p_i(x)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны, то оно имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где $y_0^{(k)}$ — любые действительные числа, а x_0 — любая точка интервала $a < x < b$.

Действительно, правая часть уравнения

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \dots - p_n(x)y + f(x) \quad (2.49_1)$$

в окрестности рассматриваемых начальных значений удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности:

- 1) правая часть непрерывна по всем аргументам;
- 2) имеет ограниченные частные производные по всем $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), так как эти производные равны непрерывным по предположению на отрезке $a \leq x \leq b$ коэффициентам $-p_{n-k}(x)$. Еще раз

отметим, что на начальные значения $y_0^{(k)}$ не налагается никаких ограничений.

Из двух основных свойств линейного оператора

$$\begin{aligned} L[cy] &= cL[y], \\ L[y_1 + y_2] &= L[y_1] + L[y_2], \end{aligned}$$

где c — постоянная, непосредственно следует:

1) Сумма $\tilde{y} + y_1$ решения \tilde{y} неоднородного уравнения

$$L[y] = f(x) \quad (2.49)$$

и решения y_1 соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением неоднородного уравнения (2.49).

Доказательство.

$$L[\tilde{y} + y_1] = L[\tilde{y}] + L[y_1],$$

но $L[\tilde{y}] \equiv f(x)$, а $L[y_1] \equiv 0$, следовательно,

$$L[\tilde{y} + y_1] \equiv f(x).$$

2) Если y_i является решением уравнения $L[y] = f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$ является решением уравнения

$$L[y] = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x),$$

где α_i — постоянные.

Доказательство.

$$L\left[\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^m L[\alpha_i y_i] \equiv \sum_{i=1}^m \alpha_i L[y_i], \quad (2.50)$$

но $L[y_i] \equiv f_i(x)$, следовательно,

$$L\left[\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x).$$

Это свойство, называемое часто *принципом суперпозиции* (или *принципом наложения*), очевидно, остается справедливым и при $m \rightarrow$

∞ , если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ сходится и допускает m -кратное почленное дифференцирование, так как в этом случае возможен предельный переход в тождествах (2.50).

3) Если уравнение $L[y] = U(x) + iV(x)$, где все коэффициенты $p_i(x)$ и функции $U(x)$ и $V(x)$ действительны, имеет решение $y = u(x) + iv(x)$, то действительная часть решения $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ являются соответственно решениями уравнений

$$L[u] = U(x), \quad L[v] = V(x).$$

Доказательство.

$$L[u + iv] \equiv U(x) + iV(x)$$

или

$$L[u] + iL[v] \equiv U(x) + iV(x).$$

Следовательно, отдельно равны действительные части $L[u] \equiv U(x)$ и мнимые части $L[v] \equiv V(x)$.

Теорема 2.8. Общее решение на отрезке $a \leq x \leq b$ уравнения $L[y] = f(x)$ с непрерывными на том же отрезке коэффициентами $p_i(x)$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^n c_i y_i$ соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения \tilde{y} неоднородного уравнения.

Доказательство. Надо доказать, что

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i + \tilde{y}, \quad (2.51)$$

где c_i — произвольные постоянные, а y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения, является общим решением неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$. Принимая во внимание 1) [стр. 114] и справедливость для рассматриваемого уравнения теоремы существования и единственности, надо доказать, что подбором постоянных c_i в (2.51) можно удовлетворить произвольно заданным начальным условиям

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.52)$$

При применении этого метода решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i$, т. е. по существу вместо неизвестной функции y вводим n неизвестных функций $c_i(x)$. Так как подбором функций $c_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) надо удовлетворить лишь одному уравнению

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (2.49)$$

то можно потребовать, чтобы эти n функций $c_i(x)$ удовлетворяли бы еще каким-нибудь $n-1$ уравнениям, которые мы выбираем так, чтобы производные функции $y = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i(x)$ имели бы по возможности такой же вид, какой они имеют при постоянных c_i . Выберем $c_i(x)$ так, чтобы вторая сумма в правой части

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i'(x) + \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i(x)$$

равнялась нулю,

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i(x) = 0,$$

и, следовательно,

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i'(x),$$

т. е. y' имеет такой же вид, как и при постоянных c_i . Точно так же у второй производной

$$y'' = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i''(x) + \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i'(x)$$

требуем обращения в нуль второй суммы и тем самым подчиняем $c_i(x)$ второму условию:

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i'(x) = 0.$$

Продолжая вычислять производные функции $y = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i$ до порядка $n-1$ включительно и требуя каждый раз обращения в нуль суммы $\sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i^{(k)}(x)$:

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i^{(k)}(x) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2), \quad (2.54)$$

ПОЛУЧИМ

[illegible]

Пример 2.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Варьируем c_1 и c_2 :

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

$c_1(x)$ и $c_2(x)$ определяются из системы уравнений (2.57):

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\frac{\sin x}{\cos x}, & c_1(x) &= \ln |\cos x| + \bar{c}_1; \\ c_2'(x) &= 1, & c_2(x) &= x + \bar{c}_2. \end{aligned}$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = \bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

Пример 3.

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $x = c_1 \cos at + c_2 \sin at$. Варьируя постоянные $x = c_1(t) \cos at + c_2(t) \sin at$, получим

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cos at + c_2'(t) \sin at &= 0, \\ -ac_1'(t) \sin at + ac_2'(t) \cos at &= f(t), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -\frac{1}{a} f(t) \sin at, & c_1(t) &= -\frac{1}{a} \int_0^t f(u) \sin au \, du + \bar{c}_1, \\ c_2'(t) &= \frac{1}{a} f(t) \cos at, & c_2(t) &= \frac{1}{a} \int_0^t f(u) \cos au \, du + \bar{c}_2, \\ x(t) &= -\frac{\cos at}{a} \int_0^t f(u) \sin au \, du + \frac{\sin at}{a} \int_0^t f(u) \cos au \, du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at, \end{aligned}$$

или

$$x(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) [\cos au \sin at - \sin au \cos at] du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at,$$

откуда окончательно получаем

$$x(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) \sin a(t-u) du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at.$$

Заметим, что первое слагаемое правой части является частным решением исходного уравнения, удовлетворяющим начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Итак, знание n линейно независимых частных решений соответствующего однородного уравнения позволяет методом вариации постоянных проинтегрировать неоднородное уравнение

$$L[y] = f(x).$$

Если же известно лишь k , где $k < n$, линейно независимых решений y_1, y_2, \dots, y_k соответствующего однородного уравнения, то, как уже указывалось на стр. 101, замена переменных позволяет понизить порядок уравнения до $n - k$, сохраняя его линейность. Заметим, что если $k = n - 1$, то порядок уравнения снижается до первого, а линейное уравнение первого порядка всегда можно проинтегрировать в квадратурах.

Аналогично могут быть использованы k решений неоднородного уравнения $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k$, так как их разности являются уже решениями соответствующего однородного уравнения. Действительно,

$$L[\tilde{y}_j] \equiv f(x), \quad L[\tilde{y}_p] \equiv f(x),$$

следовательно,

$$L[\tilde{y}_j - \tilde{y}_p] \equiv L[\tilde{y}_j] - L[\tilde{y}_p] \equiv f(x) - f(x) \equiv 0.$$

Если частные решения соответствующего однородного уравнения

$$(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_k), \quad (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_k), \quad \dots, \quad (\tilde{y}_{k-1} - \tilde{y}_k) \quad (2.58)$$

линейно независимы, то порядок уравнения $L(y) = f(x)$ может быть понижен до $n - (k - 1)$. Очевидно, что другие разности $\tilde{y}_j - \tilde{y}_p$ являются линейными комбинациями решений (2.58)

$$\tilde{y}_j - \tilde{y}_p = (\tilde{y}_j - \tilde{y}_k) - (\tilde{y}_p - \tilde{y}_k)$$

[illegible]

Подставляя (2.62) и (2.63) в уравнение (2.59), получаем

$$\int_{x_0}^x L[K(x, s)]f(s) ds + f(x) \equiv f(x),$$

так как $K(x, s)$ является решением соответствующего однородного уравнения и $L[K(x, s)] \equiv 0$.

Решение $K(x, s)$ может быть выделено из общего решения $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$ однородного уравнения, если выбрать произвольные постоянные c_i так, чтобы удовлетворялись условия (2.60) и (2.61).

Пример 4. Для уравнения

$$y'' + a^2 y = f(x) \quad (2.64)$$

общим решением является $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$, условия (2.60) и (2.61) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} c_1 \cos as + c_2 \sin as &= 0, \\ -ac_1 \sin as + ac_2 \cos as &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_1 = -\frac{\sin as}{a}, \quad c_2 = \frac{\cos as}{a}$$

и искомое решение $K(x, s)$ имеет вид

$$K(x, s) = \frac{1}{a} \sin a(x - s).$$

Решение уравнения (2.64), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, согласно (2.62), представимо в виде

$$y(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \sin a(x - s) f(s) ds.$$

При $x_0 = 0$ это решение совпадает с полученным выше (см. стр. 120) другим методом решением того же уравнения.

Можно дать физическую интерпретацию функции $K(x, s)$ и решению линейного уравнения с правой частью в форме (2.62). При этом нам будет удобнее независимое переменное обозначить буквой t .

Во многих задачах решение $y(t)$ уравнения

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f(t) \quad (2.65)$$

описывает смещение некоторой системы, а функция $f(t)$ — силу, действующую на эту систему, t — время.

Предположим вначале, что при $t < s$ система находилась в состоянии покоя и ее смещение вызывается силой $f_\varepsilon(t)$, отличной от нуля лишь в промежутке $s < t < s + \varepsilon$, причем импульс этой силы равен 1:

$$\int_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau) d\tau = 1.$$

Обозначим $y_\varepsilon(t)$ решение уравнения

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f_\varepsilon(t).$$

Легко проверяется существование предела $y_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, не зависящего от выбора функции $f_\varepsilon(t)$, в предположении, что она не меняет знака. Действительно,

$$y_\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t K(t, s) f_\varepsilon(s) ds.$$

Применяя теорему о среднем при $t > s + \varepsilon$, получим

$$y_\varepsilon(t) = K(t, s + \varepsilon^*) \int_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau) d\tau = K(t, s + \varepsilon^*),$$

где $0 < \varepsilon^* < \varepsilon$; следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) = K(t, s).$$

Поэтому функцию $K(t, s)$ естественно назвать *функцией влияния* мгновенного импульса в момент $t = s$.

Разбивая промежуток (t_0, t) точками s_i ($i = 0, 1, \dots, n$) на m равных частей длины $\Delta s = (t - t_0)/m$, представим функцию $f(t)$ в (2.65) в виде суммы функций $f_i(t)$, где $f_i(t)$ отлична от нуля лишь на i -м промежутке $s_{i-1} < t < s_i$, на котором она совпадает с функцией $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t).$$

В силу принципа суперпозиции (стр. 114) решение уравнения (2.65) имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=1}^m y_i(t),$$

где $y_i(t)$ — решения уравнений

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f_i(t)$$

с нулевыми начальными значениями. Если m достаточно велико, то решение $y_i(t)$ можно рассматривать как функцию влияния мгновенного импульса интенсивности $f_i(s_i)\Delta s$. Следовательно,

$$y(t) \cong \sum_{i=1}^m K(t, s_i) f(s_i) \Delta s.$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим решение уравнения (2.65) с нулевыми начальными условиями в виде

$$y = \int_{t_0}^t K(t, s) f(s) ds,$$

показывающем, что влияние непрерывно действующей силы можно рассматривать как наложение (суперпозицию) влияний мгновенных импульсов.

§ 6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера

При решении линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях без труда удастся подобрать частные решения и тем самым свести задачу к интегрированию соответствующего однородного уравнения.

Пусть, например, правая часть является многочленом степени s , и следовательно, уравнение имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s, \quad (2.66)$$

где все a_j и A_i — постоянные.

Если $a_n \neq 0$, то существует частное решение уравнения (2.66), имеющее тоже вид многочлена степени s . Действительно, подставляя

$$y = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s$$

$$y'' + y = x^2 + x. \quad (2.68)$$

Частное решение имеет вид

$$y = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Подставляя в уравнение (2.68) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -2, \quad \tilde{y} = x^2 + x - 2.$$

Общее решение

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 + x - 2.$$

Пример 2.

$$y'' + y' = x - 2.$$

Частное решение ищем в виде

$$y = x(B_0 x + B_1).$$

Подставляя в уравнение и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества, находим

$$B_0 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = -3, \quad \tilde{y} = x \left(\frac{1}{2}x - 3 \right).$$

Общее решение

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + x \left(\frac{1}{2}x - 3 \right).$$

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^{px} (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s), \quad (2.69)$$

где все a_j и A_i — постоянные. Как было указано выше (стр. 108), замена переменных $y = e^{px} z$ преобразует уравнение (2.69) к виду

$$e^{px} [b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z] = e^{px} (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s),$$

или

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s, \quad (2.70)$$

где все b_j — постоянные.

Частное решение уравнения (2.70), если $b_n \neq 0$, имеет вид

$$\tilde{z} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s,$$

а значит, частное решение уравнения (2.69)

$$\tilde{y} = e^{px}(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Условие $b_n \neq 0$ означает, что $\bar{k} = 0$ не является корнем характеристического уравнения

$$b_0\bar{k}^n + b_1\bar{k}^{n-1} + \dots + b_n = 0, \quad (2.71)$$

а следовательно, $k = p$ не является корнем характеристического уравнения

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.72)$$

так как корни этих характеристических уравнений связаны зависимостью $k = \bar{k} + p$ (см. стр. 109).

Если же $\bar{k} = 0$ является корнем характеристического уравнения (2.71) кратности α , другими словами, $k = p$ является корнем характеристического уравнения (2.72) той же кратности α , то частные решения уравнений (2.70) и (2.69) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= x^\alpha(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s), \\ \tilde{y} &= x^\alpha e^{px}(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s), \end{aligned}$$

Итак, если правая часть линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$e^{px}(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s),$$

то, если p не является корнем характеристического уравнения, частное решение надо искать в таком же виде:

$$\tilde{y} = e^{px}(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Если же p является корнем характеристического уравнения кратности α (этот случай называется особым или резонансным), то частное решение надо искать в виде

$$y = x^\alpha e^{px}(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s).$$

Пример 3.

$$y'' + 9y = e^{5x}.$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = Be^{5x}.$$

Пример 4.

$$y'' + y = e^{3x}(x - 2).$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = e^{3x}(B_0x + B_1).$$

Пример 5.

$$y'' - y = e^x(x^2 - 1).$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = xe^x(B_0x^2 + B_1x + B_2),$$

так как $k = 1$ является простым корнем характеристического уравнения.

Пример 6.

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5).$$

Частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = x^3e^{-x}(B_0x + B_1),$$

так как $k = -1$ является трехкратным корнем характеристического уравнения.

Заметим, что наши рассуждения остаются справедливыми и при комплексном p , поэтому если правая часть линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$e^{px}[P_s(x) \cos qx + Q_s(x) \sin qx], \quad (2.73)$$

где один из многочленов $P_s(x)$ или $Q_s(x)$ имеет степень s , а другой — степень не выше чем s , то, преобразуя тригонометрические функции по формулам Эйлера к показательному виду, получим в правой части

$$e^{(p+qi)x}R_s(x) + e^{(p-qi)x}T_s(x), \quad (2.74)$$

где $R_s(x)$ и $T_s(x)$ — многочлены степени s .

Для каждого слагаемого правой части можно уже применить указанное выше правило, а именно, если $p \pm qi$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение можно искать в таком же виде, как и правая часть (2.74); если же $p \pm qi$ являются корнями характеристического уравнения кратности α , то частное решение приобретает еще множитель x^α .

Если опять вернуться к тригонометрическим функциям, то это правило можно сформулировать так:

а) Если $p \pm qi$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = e^{px} [\bar{P}_s(x) \cos qx + \bar{Q}_s(x) \sin qx],$$

где $\bar{P}_s(x)$ и $\bar{Q}_s(x)$ — многочлены степени s с неопределенными коэффициентами.

Заметим, что если один из многочленов $P_s(x)$ или $Q_s(x)$ имеет степень ниже s или даже, в частности, тождественно равен нулю, то все же оба многочлена $\bar{P}_s(x)$ и $\bar{Q}_s(x)$ будут, вообще говоря, иметь степень s .

б) Если $p \pm qi$ являются α -кратными корнями характеристического уравнения (резонансный случай), то частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = x^\alpha e^{px} [\bar{P}_s(x) \cos qx + \bar{Q}_s(x) \sin qx].$$

Пример 7.

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

Так как числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Пример 8.

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Так как числа $\pm 2i$ являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = x[A \cos 2x + B \sin 2x].$$

Пример 9.

$$y^{\text{IV}} + 2y'' + y = \sin x.$$

Так как числа $\pm i$ являются двукратными корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y = x^2(A \cos x + B \sin x).$$

Пример 10.

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x \cos x + 3 \sin x).$$

Так как числа $-1 \pm i$ являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = xe^{-x}[(A_0x + A_1)\cos x + (B_0x + B_1)\sin x].$$

Во многих случаях при нахождении частных решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами с правой частью вида (2.73) целесообразно перейти к показательным функциями.

Например, в уравнении

$$y'' - 2y' + y = \cos x$$

можно преобразовать $\cos x$ по формуле Эйлера или, еще проще, рассмотреть уравнение

$$y'' - 2y' + y = e^{ix}, \quad (2.75)$$

действительная часть решения которого должна удовлетворять исходному уравнению (см. стр. 115).

Частное решение уравнения (2.75) можно искать в виде

$$y = Ae^{ix}.$$

Тогда

$$A = \frac{i}{2}, \quad y = \frac{i}{2}(\cos x + i \sin x).$$

Частное решение исходного уравнения

$$\tilde{y}_1 = \operatorname{Re} y = -\frac{1}{2} \sin x.$$

Для нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях очень удобен операторный метод.

Понятие об операторном методе решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для производных порядка k введем обозначение

$$\frac{d^k y}{dx^k} = D^k y.$$

Пользуясь этим обозначением, запишем уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

в виде

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n y = f(x)$$

или

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x). \quad (2.76)$$

Выражение

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

называется *операторным многочленом*. Этот операторный многочлен кратко обозначим $F(D)$, а уравнение (2.76) запишем в виде

$$F(D)y = f(x).$$

Непосредственной проверкой легко устанавливается справедливость следующих тождеств:

- 1) $F(D)e^{kx} \equiv e^{kx} F(k),$
- 2) $F(D^2) \sin ax \equiv \sin ax F(-a^2),$
- 3) $F(D^2) \cos ax \equiv \cos ax F(-a^2),$
- 4) $F(D)e^{kx} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k)v(x).$

Действительно:

$$\begin{aligned} 1) F(D)e^{kx} &= (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) e^{kx} \\ &= e^{kx} (a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n) = e^{kx} F(k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) F(D^2) \sin ax &= (a_0 D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \dots + a_{n-1} D^2 + a_n) \sin ax \\ &= [a_0 (-a^2)^n + a_1 (-a^2)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (-a^2) + a_n] \sin ax = \sin ax F(-a^2). \end{aligned}$$

Тождество 3) доказывается совершенно аналогично:

$$F(D^2) \cos ax = \cos ax F(-a^2).$$

$$\begin{aligned} 4) F(D)e^{kx} v(x) &= \sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p (e^{kx} v(x)) \\ &= e^{kx} \sum_{p=0}^n a_{n-p} \left[k^p v(x) + p k^{p-1} Dv + \frac{p(p-1)}{2!} k^{p-2} D^2 v + \dots + D^p v \right] \\ &= e^{kx} \sum_{p=0}^n a_{n-p} (D+k)^p v = e^{kx} F(D+k)v(x). \end{aligned}$$

Суммой двух операторов $F_1(D)$ и $F_2(D)$ называется оператор $[F_1(D) + F_2(D)]$, действие которого на некоторую функцию $f(x)$ определяется равенством

$$[F_1(D) + F_2(D)]f(x) = F_1(D)f(x) + F_2(D)f(x).$$

Из этого определения следует, что

$$\sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p + \sum_{p=0}^n b_{n-p} D^p = \sum_{p=0}^n (a_{n-p} + b_{n-p}) D^p,$$

так как действие левой и правой частей этого равенства на некоторую n раз дифференцируемую функцию $f(x)$ приводит к одному и тому же результату, т. е. правило сложения операторных многочленов не отличается от правила сложения обычных (не операторных) многочленов.

Произведением двух операторов $F_1(D) \cdot F_2(D)$ называется оператор, действие которого на некоторую достаточное число раз дифференцируемую функцию $f(x)$ определяется равенством

$$F_1(D) \cdot F_2(D) f(x) = F_1(D) [F_2(D) f(x)],$$

т. е. на функцию $f(x)$ действует сначала правый множитель, а затем на результат действия правого множителя на функцию $f(x)$ действует левый множитель.

Исходя из этого определения, нетрудно обнаружить, что правило умножения операторных многочленов не отличается от правила умножения обычных (не операторных) многочленов. Действительно,

$$\sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p \sum_{q=0}^m b_{m-q} D^q = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m a_{n-p} b_{m-q} D^{p+q}, \quad (2.77)$$

так как

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p \sum_{q=0}^m b_{m-q} D^q f(x) &= \sum_{p=0}^n a_{n-p} D^p \left[\sum_{q=0}^m b_{m-q} f^{(q)}(x) \right] \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m a_{n-p} b_{m-q} f^{(p+q)}(x), \end{aligned}$$

что совпадает с результатом действия оператора

$$\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m a_{n-p} b_{m-q} D^{p+q}$$

на $f(x)$.

Из (2.77), в частности, следует коммутативность умножения операторов

$$F_1(D) F_2(D) = F_2(D) F_1(D).$$

Справедливость дистрибутивного закона

$$F(D)[F_1(D) + F_2(D)] = F(D)F_1(D) + F(D)F_2(D)$$

непосредственно следует из правила дифференцирования суммы. Следовательно, действия сложения и умножения с операторными многочленами не отличаются от тех же действий с обычными (не операторными) многочленами.

Определим теперь оператор $1/F(D)$.

Результатом действия оператора $1/F(D)$ на некоторую непрерывную функцию $f(x)$ является решение уравнения

$$\begin{aligned} F(D)y &= f(x), \\ y &= \frac{1}{F(D)}f(x). \end{aligned} \tag{2.78}$$

Следовательно,

$$F(D) \left[\frac{1}{F(D)}f(x) \right] \equiv f(x). \tag{2.79}$$

Можно было бы считать, что $(1/F(D))f(x)$ является решением уравнения (2.78), определяемым какими-нибудь конкретными, например нулевыми, начальными условиями, однако для наших целей удобнее считать, что $(1/F(D))f(x)$ является одним из решений, все равно каким, уравнения (2.78) и, следовательно, действие оператора $1/F(D)$ на некоторую функцию $f(x)$ определено лишь с точностью до слагаемого, равного решению соответствующего однородного уравнения.

При таком понимании действия оператора $1/F(D)$ будет справедливым равенство

$$\frac{1}{F(D)}[F(D)f(x)] = f(x), \tag{2.80}$$

так как $f(x)$, очевидно, является решением уравнения

$$F(D)y = F(D)f(x).$$

Произведение операторов $\Phi(D)$ на $1/F(D)$ определяется равенством

$$\Phi(D) \frac{1}{F(D)}f(x) = \Phi(D) \left[\frac{1}{F(D)}f(x) \right].$$

Аналогично

$$\frac{1}{F(D)}\Phi(D)f(x) = \frac{1}{F(D)}[\Phi(D)f(x)].$$

Поэтому в формулах (2.79) и (2.80) скобки можно опустить. Заметим еще, что

$$\frac{1}{D^p} f(x) = \iint \cdots \int f(x) dx^p,$$

так как $(1/D^p)f(x)$ является по определению оператора $1/F(D)$ решением уравнения $D^p y = f(x)$.

Проверим следующие свойства оператора $1/F(D)$:

$$1) \quad \frac{1}{F(D)} k f(x) = k \frac{1}{F(D)} f(x),$$

где k — постоянный множитель, так как

$$F(D) k \frac{1}{F(D)} f(x) = k F(D) \frac{1}{F(D)} f(x) = k f(x).$$

$$2) \quad \frac{1}{F(D)} e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)}, \quad \text{если } F(k) \neq 0.$$

Действительно, $e^{kx}/F(k)$ является решением уравнения $F(D)y = e^{kx}$, так как по формуле 1) [стр. 132]

$$F(D) \frac{e^{kx}}{F(k)} \equiv \frac{F(k)e^{kx}}{F(k)} \equiv e^{kx}.$$

$$3) \quad \frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{\sin ax}{F(-a^2)}, \quad \text{если } F(-a^2) \neq 0.$$

Действительно, $(\sin ax)/F(-a^2)$ является решением уравнения $F(D^2)y = \sin ax$, так как по формуле 2) [стр. 132]

$$F(D^2) \frac{\sin ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \sin ax \equiv \sin ax.$$

$$4) \quad \frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}, \quad \text{если } F(-a^2) \neq 0,$$

так как по формуле 3) [стр. 132]

$$F(D^2) \frac{\cos ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \cos ax \equiv \cos ax.$$

$$5) \quad \frac{1}{F(D)} e^{kx} v(x) = e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x).$$

Действительно, $e^{kx} (1/F(D+k)) v(x)$ является решением уравнения $F(D)y = e^{kx} v(x)$, так как по формуле 4) [стр. 132]

$$F(D) e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x) = e^{kx} F(D+k) \frac{1}{F(D+k)} v(x) \equiv e^{kx} v(x).$$

$$6) \quad \frac{1}{F(D)} [f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)} f_1(x) + \frac{1}{F(D)} f_2(x).$$

Это равенство является следствием принципа суперпозиции (стр. 114).

$$7) \quad \frac{1}{F_1(D) \cdot F_2(D)} f(x) = \frac{1}{F_1(D)} \frac{1}{F_2(D)} f(x),$$

т. е.

$$y = \frac{1}{F_1(D)} \left[\frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \quad (2.81)$$

является решением уравнения

$$F_1(D) F_2(D) y = f(x). \quad (2.82)$$

Действительно, подставляя (2.81) в (2.82), получим

$$F_2(D) F_1(D) \frac{1}{F_1(D)} \left[\frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \equiv F_2(D) \frac{1}{F_2(D)} f(x) \equiv f(x).$$

Приведем несколько примеров нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом:

$$1) \quad y'' + 4y = e^x, \quad \text{или} \quad (D^2 + 4)y = e^x, \quad \text{откуда}$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 4} e^x = \frac{e^x}{5}.$$

$$2) \quad y^{\text{IV}} + y = 2 \cos 3x, \quad \text{или} \quad (D^4 + 1)y = 2 \cos 3x,$$

$$y = \frac{1}{D^4 + 1} 2 \cos 3x = \frac{2 \cos 3x}{(-9)^2 + 1} = \frac{1}{41} \cos 3x.$$

$$3) \quad y'' + 9y = 5 \sin x, \quad (D^2 + 9)y = 5 \sin x,$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 9} 5 \sin x = \frac{5 \sin x}{-1 + 9} = \frac{5}{8} \sin x.$$

$$4) \quad y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}, \quad (D - 2)^2 y = x^2 e^{2x},$$

$$y = \frac{1}{(D - 2)^2} e^{2x} x^2 = e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2 = e^{2x} \frac{x^4}{12}.$$

$$5) \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, \quad (D - 1)^3 y = e^x,$$

$$y = \frac{1}{(D - 1)^3} e^x.$$

$F(k) = 0$, поэтому вместо второй формулы применяем формулу 5) [стр. 136], рассматривая e^x как произведение $e^x \cdot 1$:

$$y = \frac{1}{(D - 1)^3} e^x \cdot 1 = e^x \frac{1}{D^3} 1 = e^x \frac{x^3}{6}.$$

$$6) \quad y''' - y = \sin x,$$

$$(D^3 - 1)y = \sin x. \quad (2.83)$$

$y = (1/(D^3 - 1)) \sin x$. Так как оператор содержит нечетные степени D , то воспользоваться формулой 3) [стр. 135] нельзя. Поэтому вместо исходного уравнения рассмотрим уравнение $(D^3 - 1)y = e^{ix}$, или

$$(D^3 - 1)y = \cos x + i \sin x. \quad (2.84)$$

Мнимая часть решения уравнения (2.84) будет решением исходного уравнения (см. стр. 115):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^3 - 1} e^{ix} = \frac{e^{ix}}{i^3 - 1} = \frac{-e^{ix}}{1 + i} = \frac{(-1 + i)(\cos x + i \sin x)}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{i}{2}(\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Мнимая часть решения $(\cos x - \sin x)/2$ уравнения (2.84) является решением уравнения (2.83).

$$7) \quad y'' + y = \cos x, \quad (D^2 + 1)y = \cos x, \quad y = \frac{1}{D^2 + 1} \cos x.$$

Формула 4) [стр. 135] неприменима, так как $F(-a^2) = 0$, поэтому опять вместо заданного уравнения рассматриваем уравнение

$$y'' + y = e^{ix} \quad \text{или} \quad y'' + y = \cos x + i \sin x$$

и берем действительную часть его решения

$$\begin{aligned} (D^2 + 1)y = e^{ix}, \quad y &= \frac{1}{D^2 + 1} e^{ix} = \frac{1}{(D - i)(D + i)} e^{ix} \\ &= \frac{1}{D - i} \frac{e^{ix}}{2i} = \frac{e^{ix}}{2i} \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{e^{ix} x}{2i} = \frac{x(\cos x + i \sin x)}{2i}. \end{aligned}$$

Взяв действительную часть найденного решения вспомогательного уравнения $\frac{1}{2}x \sin x$, получим решение исходного уравнения.

$$8) \quad y^{IV} - y = e^x, \quad (D^4 - 1)y = e^x,$$

$$y = \frac{1}{D^4 - 1} e^x = \frac{1}{D - 1} \frac{1}{(D + 1)(D^2 + 1)} e^x = \frac{1}{D - 1} \frac{e^x}{4} = \frac{1}{4} e^x \frac{1}{D} 1 = \frac{x e^x}{4}.$$

Выясним еще, как действует оператор $1/F(D)$ на многочлен

$$P_p(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p.$$

Формально разделим 1 на многочлен

$$F(D) = a_n + a_{n-1}D + \dots + a_0 D^n, \quad a_n \neq 0,$$

расположенный по возрастающим степеням D , по правилу деления обычных (не операторных) многочленов. Процесс деления прекратим тогда, когда в частном получим операторный многочлен степени p :

$$b_0 + b_1 D + \dots + b_p D^p = Q_p(D).$$

При этом в остатке окажется многочлен

$$R(D) = c_{p+1} D^{p+1} + c_{p+2} D^{p+2} + \dots + c_{p+n} D^{p+n},$$

содержащий оператор D в степенях не ниже $p+1$. В силу зависимости между делимым, делителем, частным и остатком получим

$$F(D)Q_p(D) + R(D) \equiv 1. \quad (2.85)$$

Это тождество справедливо для обычных (не операторных) многочленов, но так как правила сложения и умножения операторных многочленов не отличаются от правил сложения и умножения обычных многочленов, то тождество справедливо и для операторных многочленов. Действуя правой и левой частями тождества (2.85) на многочлен $A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p$, получим

$$\begin{aligned} [F(D)Q_p(D) + R(D)](A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p) \\ \equiv A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p \end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что

$$R(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p) \equiv 0,$$

так как $R(D)$ содержит D в степенях не ниже $p+1$, будем иметь

$$F(D)[Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p)] \equiv A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p,$$

т. е. $Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p)$ является решением уравнения

$$F(D)y = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p.$$

Итак,

$$\frac{1}{F(D)}(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p) = Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p).$$

Например:

$$9) \quad y'' + y = x^2 - x + 2, \quad (D^2 + 1)y = x^2 - x + 2, \quad y = \frac{1}{D^2 + 1}(x^2 - x + 2).$$

Разделив 1 на $1 + D^2$, получим $Q_2(D) = 1 - D^2$. Следовательно,

$$y = (1 - D^2)(x^2 - x + 2) = x^2 - x.$$

$$10) \quad y'' + 2y' + 2y = x^2 e^{-x}, \quad (D^2 + 2D + 2)y = x^2 e^{-x},$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 2D + 2} x^2 e^{-x} = e^{-x} \frac{1}{D^2 + 1} x^2 = e^{-x} (1 - D^2) x^2 = e^{-x} (x^2 - 2).$$

$$11) \quad y'' + y = x \cos x, \quad (D^2 + 1)y = x \cos x.$$

Перейдем к уравнению $(D^2 + 1)y = x e^{ix}$ и потом возьмем действительную часть решения

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^2 + 1} x e^{ix} = e^{ix} \frac{1}{D(D + 2i)} x = e^{ix} \frac{1}{D} \left(\frac{1}{2i} + \frac{D}{4} \right) x \\ &= e^{ix} \frac{1}{D} \left(\frac{x}{2i} + \frac{1}{4} \right) = e^{ix} \left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4} \right) = (\cos x + i \sin x) \left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4} \right). \end{aligned}$$

Взяв действительную часть $\frac{1}{4}x^2 \sin x + \frac{1}{4}x \cos x$, получим искомое решение.

З а м е ч а н и е. Последний пример показывает, как надо действовать оператором $1/F(D)$ на многочлен, если $a_n = 0$. Представив $F(D)$ в виде $D^s \Phi(D)$, где свободный член многочлена $\Phi(D)$ уже не равен нулю, действуем на многочлен вначале оператором $1/\Phi(D)$, а затем оператором $1/D^s$.

Неоднородные уравнения Эйлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (2.86)$$

или

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (2.87)$$

можно интегрировать путем решения соответствующих однородных уравнений (см. стр. 110) и подбора одного частного решения неоднородного уравнения, или применяя метод вариации постоянных. Однако обычно проще вначале проинтегрировать однородное уравнение, а для подбора частного решения преобразовать уравнение Эйлера (2.86) заменой переменных $x = \pm e^t$ (для уравнения (2.87) $ax+b = \pm e^t$) к уравнению с постоянными коэффициентами, для которых хорошо разработаны методы нахождения частных решений.

Пример 11.

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = x \ln^3 x. \quad (2.88)$$

Ищем решение соответствующего однородного уравнения в виде $y = x^k$

$$k^2 - 2k + 1 = 0; \quad (2.89)$$

$k_{1,2} = 1$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y = (c_1 + c_2 \ln x)x$. Заменой переменных $x = e^t$ преобразуем уравнение (2.88) в уравнение с постоянными коэффициентами $\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y = t^3 e^t$ (левая часть этого уравнения сразу может быть написана по характеристическому уравнению (2.89)). Операторным методом легко находим частное решение преобразованного уравнения

$$y = \frac{1}{(D-1)^2} e^t t^3 = e^t \frac{1}{D^2} t^3 = \frac{e^t t^5}{20}, \quad y = \frac{x \ln^5 x}{20}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.88) имеет вид

$$y = \left(c_1 + c_2 \ln x + \frac{\ln^5 x}{20} \right) x.$$

§ 7. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов

Задача интегрирования линейных однородных уравнений n -го порядка

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2.90)$$

сводится к подбору n или хотя бы $n - 1$ линейно независимых частных решений. Однако частные решения легко подбираются лишь в исключительных случаях. В более сложных случаях частные решения ищут в виде суммы некоторого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x)$, особенно часто в виде суммы степенного или обобщенного степенного ряда.

Условия, при которых существуют решения в виде суммы степенного или обобщенного степенного ряда, обычно устанавливаются методами теории функций комплексного переменного, знакомства с которыми у читателя мы не предполагаем, поэтому основные теоремы этого параграфа даны без доказательства в применении к наиболее часто встречающимся в приложениях уравнениям второго порядка.

Теорема 2.9 (об аналитичности решения). Если $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ являются аналитическими функциями x в окрестности точки $x = x_0$ и $p_0(x_0) \neq 0$, то решения уравнения

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (2.91)$$

также являются аналитическими функциями в некоторой окрестности той же точки и, следовательно, решения уравнения (2.91) можно искать в виде

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Теорема 2.10 (о разложимости решения в обобщенный степенной ряд). Если уравнение (2.91) удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, но $x = x_0$ является нулем конечного порядка s функции $p_0(x)$, нулем порядка $s - 1$ или выше функции $p_1(x)$ (если $s > 1$) и нулем порядка не ниже $s - 2$ коэффициента $p_2(x)$ (если $s > 2$), то существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (2.91) в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$y = a_0(x - x_0)^k + a_1(x - x_0)^{k+1} + \dots + a_n(x - x_0)^{k+n} + \dots, \quad (2.92)$$

где k — некоторое действительное число, которое может быть как целым, так и дробным, как положительным, так и отрицательным.

Второе линейно независимое с (2.92) решение, как правило, имеет тоже вид суммы обобщенного степенного ряда, но иногда может еще содержать произведение обобщенного степенного ряда на $\ln(x - x_0)$.

Впрочем, в конкретных примерах можно обойтись без сформулированных выше двух теорем, тем более, что эти теоремы в указанной формулировке все равно не устанавливают области сходимости рассматриваемых рядов. Чаще всего в конкретных задачах подбирают

степенной или обобщенный степенной ряд, формально удовлетворяющий дифференциальному уравнению, т. е. при подстановке обращающий рассматриваемое уравнение (2.90) порядка n в тождество, если предполагать сходимость ряда и возможность почленного дифференцирования n раз. Получив формально решение в виде ряда, исследуют его на сходимость и на возможность почленного дифференцирования n раз. В той области, где ряд сходится и допускает n -кратное почленное дифференцирование, он не только формально удовлетворяет уравнению, но его сумма действительно является искомым решением.

Пример 1.

$$y'' - xy = 0. \quad (2.93)$$

Ищем решение в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Опираясь на теорему 2.9 или формально дифференцируя этот ряд почленно два раза и подставляя в уравнение (2.93), получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим: $a_2 = 0$; $3 \cdot 2a_3 - a_0 = 0$, откуда $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} a_0$; $4 \cdot 3a_4 - a_1 = 0$, откуда $a_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} a_1$; $5 \cdot 4a_5 - a_2 = 0$, откуда $a_5 = \frac{1}{4 \cdot 5} a_2$; ...; $n(n-1)a_n - a_{n-3} = 0$, откуда $a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3}$; ... Следовательно,

$$a_{3n-1} = 0, \quad a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n-1)3n},$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3n(3n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

a_0 и a_1 остаются произвольными. Итак,

$$y = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n-1)3n} + \dots \right] + a_1 \left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3n(3n+1)} + \dots \right]. \quad (2.94)$$

Радиус сходимости этого степенного ряда равен бесконечности. Следовательно, сумма ряда (2.94) при любых значениях x является решением рассматриваемого уравнения.

При $k = -n$ совершенно аналогично получаем

$$a_{2p+1} = 0, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p! (-n+1)(-n+2) \dots (-n+p)}.$$

При $k = n$ получаем решение

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+n}}{2^{2p} p! (n+1)(n+2) \dots (n+p)}.$$

Этому решению можно придать более удобный вид, если выбрать произвольное постоянное $a_0 = 1/(2^n \Gamma(n+1))$, где Γ — *гамма-функция* Эйлера; напомним, что

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad \text{при } p > 0, \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Тогда

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p! \Gamma(n+p+1)}. \quad (2.96)$$

Это решение обычно обозначается $J_n(x)$ и называется *функцией Бесселя первого рода порядка n* .

При $k = -n$, выбирая $a_0 = 1/(2^{-n} \Gamma(-n+1))$, аналогично получаем *функцию Бесселя первого рода порядка $-n$* :

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}}{p! \Gamma(-n+p+1)}. \quad (2.97)$$

Ряды (2.96) и (2.97) сходятся при любых значениях x (в (2.97) $x \neq 0$) и допускают двукратное почленное дифференцирование, следовательно $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ являются решениями уравнения Бесселя (2.95).

При n , не равном целому числу, решения $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$, очевидно, линейно независимы, так как их разложения в ряды начинаются с различных степеней x и, следовательно, линейная комбинация $\alpha_1 J_n(x) + \alpha_2 J_{-n}(x)$ может тождественно равняться нулю лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если же n равно целому числу, то, так как для целых отрицательных значений p и для $p = 0$ функция $\Gamma(p)$ обращается в бесконечность, разложения в ряды функций $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ начнутся с одинаковых степеней x и, как нетрудно проверить, функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ будут находиться в следующей линейной зависимости:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Следовательно, при целом n вместо $J_{-n}(x)$ надо искать другое решение, которое было бы линейно независимо от $J_n(x)$. Такое решение можно получить различными способами, например, можно, зная одно частное решение $J_n(x)$, понизить порядок уравнения (2.95) подстановкой, указанной на стр. 100, или сразу искать решение в виде суммы обобщенного степенного ряда и произведения обобщенного степенного ряда на $\ln x$. Получаемое любым из этих способов линейно независимое от $J_n(x)$ решение при вполне определенном выборе произвольного постоянного множителя называется *функцией Бесселя второго рода* и обозначается $Y_n(x)$.

Чаще всего, однако, $Y_n(x)$ определяют так: считая пока n не равным целому числу, рассматривают решение $Y_n(x)$ уравнения Бесселя, являющееся линейной комбинацией решений $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi};$$

затем, переходя к пределу при n , стремящемся к целому числу, получают линейно независимое от $J_n(x)$ частное решение уравнения Бесселя $Y_n(x)$, определенное уже и для целых значений n .

Итак, общее решение уравнения Бесселя при n , не равном целому числу, имеет вид

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x),$$

а при n , равном целому числу,

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Функции Бесселя первого и второго рода изучены весьма детально и, в частности, составлены подробные таблицы их значений. Поэтому, если какая-нибудь задача сведена к функциям Бесселя, то ее можно считать решенной в такой же мере, в какой мы считаем решенной задачу, в которой ответ дан, например, в тригонометрических функциях.

Часто в приложениях приходится рассматривать уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (m^2 x^2 - n^2)y = 0. \quad (2.98)$$

Это уравнение сводится к уравнению Бесселя заменой переменной $x_1 = mx$. Действительно, при такой замене переменных

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} = \frac{dy}{dx_1} m, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx_1^2} m^2,$$

и уравнение (2.98) переходит в уравнение Бесселя:

$$x_1^2 \frac{d^2 y}{dx_1^2} + x_1 \frac{dy}{dx_1} + (x_1^2 - n^2)y = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.98) при n , не равном целому числу, имеет вид

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 J_{-n}(mx),$$

а при n целом

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 Y_n(mx).$$

Пример 3.

$$x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right) y = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 J_{3/5}(2x) + c_2 J_{-3/5}(2x).$$

Пример 4.

$$x^2 y'' + xy' + (3x^2 - 4)y = 0.$$

Общее решение

$$y = c_1 J_2(x\sqrt{3}) + c_2 Y_2(x\sqrt{3}).$$

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

при условии, что решение должно быть непрерывно в точке $x=0$ и $y(0,3)=2$.

Общее решение имеет вид

$$y = c_1 J_{1/3}(2x) + c_2 J_{-1/3}(2x).$$

Функция $J_{-1/3}(2x)$ разрывна при $x=0$, так как ряд (2.97) начинается с отрицательных степеней x . Следовательно, решение y непрерывно в точке $x=0$ лишь при $c_2=0$:

$$y = c_1 J_{1/3}(2x).$$

Удовлетворяя второму условию $y(0,3)=2$, получим

$$c_1 = \frac{2}{J_{1/3}(0,6)}.$$

В таблицах бесселевых функций находим $J_{1/3}(0,6) = 0,700$, следовательно, $c_1 \approx 2,857$ и

$$y \approx 2,857 J_{1/3}(2x).$$

В приложениях часто требуется найти *периодические решения* некоторого дифференциального уравнения. В этом случае обычно целесообразно искать решение в виде суммы некоторого ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right).$$

Заметим, что если уравнение

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.99)$$

имеет периодическое решение $x_0(t)$ периода T , то правая часть уравнения (2.99) вдоль рассматриваемой интегральной кривой является периодической функцией периода T по первому аргументу. Действительно, подставляя в уравнение (2.99) периодическое решение $x = x_0(t)$, получаем тождество

$$x_0^{(n)}(t) = F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)).$$

Заменяя в этом тождестве t на $t+T$, мы в силу периодичности функции $x_0(t)$ и ее производных не изменим левой части уравнения и не изменим аргументов правой части, начиная со второго, следовательно,

$$F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)) \equiv F(t+T, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)),$$

т. е. функция F вдоль интегральной кривой $x = x_0(t)$ имеет период T по явно входящему аргументу t .

Следовательно, если правая часть уравнения (2.99) при любом выборе $x_0(t)$ не является периодической функцией по первому аргументу, то не существует и периодических решений. Если функция F не зависит явно от t , т. е. является постоянной по отношению к аргументу t , то F можно рассматривать как периодическую по t функцию любого периода и поэтому не исключена возможность существования периодических решений какого угодно периода.

Пусть, например, требуется найти периодические решения уравнения

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t). \quad (2.100)$$

Для существования периодического решения необходимо предположить, что f является периодической функцией. Без существенного ограничения общности можно считать, что $f(t)$ — периодическая функция периода 2π , так как если бы функция $f(t)$ имела период T , то

после преобразования независимого переменного $t_1 = (2\pi/T)t$ правая часть стала бы функцией периода 2π по новому независимому переменному t_1 .

Предположим, что функция $f(t)$, кроме того, непрерывна и разложима в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (2.101)$$

Периодическое решение ищем в виде

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt). \quad (2.102)$$

Дифференцируя ряд (2.102) почленно два раза и подставляя в уравнение (2.100), получим

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k \cos kt + B_k \sin kt) + a^2 \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \right] \\ \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \end{aligned}$$

откуда, если a не равно целому числу, определяем коэффициенты ряда (2.102):

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2 A_0}{2} &= \frac{a_0}{2}, & A_0 &= \frac{a_0}{a^2}, \\ (a^2 - k^2) A_k &= a_k, & A_k &= \frac{a_k}{a^2 - k^2}, \\ (a^2 - k^2) B_k &= b_k, & B_k &= \frac{b_k}{a^2 - k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Следовательно, уравнению (2.100) формально удовлетворяет ряд

$$\frac{a_0}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kt + b_k \sin kt}{a^2 - k^2}. \quad (2.104)$$

Очевидно, что ряд (2.104) сходится и допускает двукратное почленное дифференцирование, так как ряд (2.101), в силу непрерывности функции $f(t)$, сходится равномерно, а коэффициенты ряда

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (a_k \cos kt + b_k \sin kt)}{a^2 - k^2}, \quad (2.105)$$

составленного из вторых производных от членов ряда (2.104), отличающихся от коэффициентов a_k и b_k ряда (2.101) лишь независимым от t , монотонно стремящимся к 1 при $k \rightarrow \infty$ множителем $-k^2/(a^2 - k^2)$. Следовательно, ряд (2.105) сходится равномерно, а значит, ряд (2.104) можно было дифференцировать почленно два раза. Итак, ряд (2.104) не только формально удовлетворяет уравнению (2.100), но его сумма $x(t)$ существует и является периодическим решением уравнения (2.100).

Если a мало отличается от целого числа n и $a_n \neq 0$ или $b_n \neq 0$, то наступает явление *резонанса*, заключающееся в резком возрастании при приближении a к n хотя бы одного из коэффициентов

$$A_n = \frac{a_n}{a^2 - n^2}, \quad B_n = \frac{b_n}{a^2 - n^2}.$$

Если же $a = n$ и хотя бы один из коэффициентов a_n или b_n не равен нулю, то периодических решений не существует, так как резонирующим слагаемым

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

в правой части уравнения (2.100), как указано на стр. 130, согласно принципу суперпозиции соответствует в общем решении уравнения (2.100) непериодическое слагаемое вида

$$t(A_n \cos nt + B_n \sin nt),$$

тогда как остальные слагаемые в общем решении уравнения будут периодическими функциями. Следовательно, при $a = n$ периодическое решение уравнения (2.100) существует лишь в случае отсутствия в правой части резонирующих членов $a_n \cos nt + b_n \sin nt$, т. е. в случае

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0. \quad (2.106)$$

В последнем случае, т. е. при $a = n$, $a_n = b_n = 0$, периодическое решение уравнения (2.100) существует, причем при $k \neq n$ коэффициенты определяются по формулам (2.103), а коэффициенты A_n и B_n остаются произвольными, так как $A_n \cos nt + B_n \sin nt$ является при произвольных A_n и B_n решением соответствующего однородного уравнения.

Пример 6. Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}.$$

Ищем решение в виде ряда

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

и, определяя коэффициенты A_k и B_k по формулам (2.103), получаем

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4(2 - k^2)}.$$

Пример 7. Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 4x = \sin^2 t.$$

Так как условия существования периодического решения (2.106) не удовлетворяются:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \sin 2t \, dt = 0,$$

но

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos 2t \, dt \neq 0,$$

то периодического решения не существует.

Пример 8. Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}.$$

В правой части отсутствуют резонирующие члены $a_1 \cos t + b_1 \sin t$. Следовательно, периодическое решение существует и определяется по формулам (2.103):

$$x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(1 - k^2)} + c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

§ 8. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний

В предыдущем параграфе был указан метод нахождения периодических решений линейных уравнений вида

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t).$$

Во многих практических задачах возникает вопрос о нахождении периодического решения аналогичного уравнения, но имеющего в правой части малое нелинейное слагаемое:

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.107)$$

где μ — малый параметр.

Если отбросить слагаемое $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$, т.е. считать в уравнении (2.107) $\mu = 0$, то получим линейное уравнение

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t),$$

называемое порождающим для уравнения (2.107).

Одним из наиболее эффективных методов нахождения периодических решений уравнения нелинейных колебаний с малой нелинейностью (2.107) является разработанный А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым метод разложения решения в ряд по степеням малого параметра μ , широко применяемый в настоящее время при решении самых разнообразных задач.

Опираясь на теорему об аналитической зависимости решения от параметра (см. стр. 52), легко обобщающуюся на уравнения второго и более высокого порядков, можно утверждать, что решения $x(t, \mu)$ уравнения (2.107) будут аналитическими функциями параметра μ при достаточно малых по модулю значениях μ , если функция $f(t)$ непрерывна, а функция $F(t, x, \dot{x}, \mu)$, непрерывная по t , аналитически зависит от остальных аргументов: от x и \dot{x} в той области, в которой в дальнейшем будут меняться эти переменные, а от μ при достаточно малых по модулю значениях μ .

Предполагая, что эти условия выполнены, ищем периодическое решение $x(t, \mu)$ в виде суммы ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \cdots + \mu^n x_n(t) + \cdots.$$

Дифференцируем этот ряд почленно два раза:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \mu) &= \dot{x}_0(t) + \mu \dot{x}_1(t) + \cdots + \mu^n \dot{x}_n(t) + \cdots, \\ \ddot{x}(t, \mu) &= \ddot{x}_0(t) + \mu \ddot{x}_1(t) + \cdots + \mu^n \ddot{x}_n(t) + \cdots, \end{aligned}$$

и подставляем в уравнение (2.107), в котором функция $F(t, x, \dot{x}, \mu)$

предварительно разложена по степеням $x - x_0$, $\dot{x} - \dot{x}_0$ и μ ,

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu \left[F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} (\dot{x} - \dot{x}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \mu + \dots \right]. \quad (2.108)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях уравнения (2.108), получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + a^2 x_0 &= f(t), \\ \ddot{x}_1 + a^2 x_1 &= F(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \\ \ddot{x}_2 + a^2 x_2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

Первое из этих линейных уравнений совпадает с порождающим уравнением. Интегрируя его и подставляя найденное решение $x_0(t)$ во второе уравнение, получим для определения $x_1(t)$ опять линейное уравнение и т. д.

Для определения $x_n(t)$ мы также получим линейное уравнение, так как в правой части этого уравнения будут содержаться лишь x_j и \dot{x}_j с индексами, меньшими n , потому что из-за наличия множителя μ при F члены, содержащие в правой части x_n и \dot{x}_n и, тем более, x_k и \dot{x}_k с большими индексами, будут иметь множитель μ в степени не ниже $n + 1$.

В этом параграфе мы рассматриваем лишь вопрос о нахождении периодических решений, поэтому на правую часть уравнения

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu),$$

в соответствии с замечанием на стр. 147, естественно наложить еще одно ограничение, а именно потребовать, чтобы правая часть была периодической функцией по явно входящему аргументу t . Без существенного ограничения общности можно считать наименьший период правой части, если правая часть явно зависит от t , равным 2π , при

этом, если $f(t)$ не равно постоянной величине, периодические решения уравнения (2.107), если они существуют, при достаточно малом μ могут иметь лишь периоды, равные или кратные 2π (см. стр. 147–148).

Для нахождения периодического решения уравнения (2.108) в виде

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \cdots + \mu^n x_n(t) + \cdots \quad (2.110)$$

надо определить периодические решения $x_k(t)$ уравнений (2.109). Действительно, если решение $x(t, \mu)$ имеет постоянный период 2π (или $2m\pi$, m — целое число) при любом достаточно малом по модулю μ , то

$$\begin{aligned} x_0(t) + \mu x_1(t) + \cdots + \mu^n x_n(t) + \cdots \\ \equiv x_0(t + 2\pi) + \mu x_1(t + 2\pi) + \cdots + \mu^n x_n(t + 2\pi) + \cdots \end{aligned} \quad (2.111)$$

Следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях тождества (2.111) должны быть равны, т. е.

$$x_n(t) \equiv x_n(t + 2\pi),$$

а это и означает периодичность функций $x_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Совпадение коэффициентов при одинаковых степенях μ в левой и правой частях тождества (2.110) можно обнаружить, например, дифференцируя тождество (2.110) n раз по μ , после чего, полагая $\mu = 0$, получим

$$x_n(2\pi + t) = x_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Итак, нам надо найти периодические решения уравнений (2.109). При этом целесообразно отдельно рассмотреть следующие случаи.

1. Нерезонансный случай: a отлично от целого числа. Если a не равно целому числу, то первое из уравнений (2.109) имеет единственное периодическое решение $x_0 = \varphi_0(t)$, которое находим методом предыдущего параграфа (см. стр. 147). Затем тем же методом находим $x_1(t)$, $x_2(t)$ и т. д.

Если бы этим методом мы нашли общий член ряда (2.110), установили сходимость этого ряда и законность его двукратного почленного дифференцирования, то сумма ряда (2.110) являлась бы искомым периодическим решением периода 2π . Однако обычно нахождение общего члена ряда (2.110) является крайне сложной задачей, в силу чего приходится ограничиваться вычислением лишь нескольких первых членов ряда, что было бы достаточным для приближенного нахождения периодического решения, если бы была уверенность в том, что ряд сходится и его сумма является периодическим решением.

В связи с этим большое значение имеют теоремы А. Пуанкаре о существовании периодических решений, позволяющие, в частности, найти условия, при которых заведомо существует единственное периодическое решение уравнения (2.107), стремящееся при $\mu \rightarrow 0$ к периодическому решению порождающего уравнения.

Если условия теоремы А. Пуанкаре выполнены и, следовательно, существует единственное периодическое решение уравнения (2.107), стремящееся при $\mu \rightarrow 0$ к периодическому решению порождающего уравнения, то сумма единственного ряда с периодическими коэффициентами (2.110), формально удовлетворяющего уравнению (2.107), должна существовать и должна совпадать с искомым периодическим решением. При этом отпадает необходимость нахождения общего члена ряда (2.110) для исследования ряда на сходимость и можно, найдя несколько первых членов ряда (2.110), утверждать, что при малом μ их сумма приближенно равна искомому периодическому решению.

Теоремы А. Пуанкаре, опирающиеся на сведения из теории аналитических функций, довольно сложны, поэтому мы приводим в конце этого параграфа лишь простейшую из этих теорем, которая, однако, уже позволяет утверждать, что в рассматриваемом нерезонансном случае уравнение (2.107) всегда имеет единственное периодическое решение при достаточно малом μ .

Пример 1. Приближенно определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2x = \sin t + \mu x^2,$$

где μ — малый параметр (определить два члена ряда (2.110)). Ищем решение в виде

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots$$

Находим периодическое решение порождающего уравнения

$$\ddot{x}_0 + 2x_0 = \sin t, \quad x_0(t) = \sin t.$$

Периодическое решение уравнения

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \sin^2 t \quad \text{или} \quad \ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4}.$$

Следовательно, периодическое решение

$$x(t, \mu) \approx \sin t + \frac{1}{4}(1 + \cos 2t)\mu.$$

2. Резонансный случай. Метод малого параметра может быть применен и в резонансном случае, т. е. в случае, когда в уравнении (2.107) [стр. 151] a равно целому числу n или стремится к целому числу n при $\mu \rightarrow 0$.

Если в уравнении (2.107) a мало отличается от целого числа n , точнее, разность $a^2 - n^2$ имеет порядок малости не ниже чем μ :

$$a^2 - n^2 = a_1\mu, \quad (2.112)$$

где a_1 ограничено при $\mu \rightarrow 0$, то уравнение

$$\ddot{x} + a^2x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

можно переписать в виде

$$\ddot{x} + n^2x = f(t) + (n^2 - a^2)x + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu),$$

откуда в силу (2.112)

$$\ddot{x} + n^2x = f(t) + \mu F_1(t, x, \dot{x}, \mu),$$

где функция F_1 удовлетворяет тем же условиям, которым по предположению удовлетворяет функция F .

Следовательно, в дальнейшем в резонансном случае можно считать a равным целому числу:

$$\ddot{x} + n^2x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu).$$

Применяя метод малого параметра, ищем периодическое решение в виде ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \cdots + \mu^k x_k(t) + \cdots.$$

Для определения функций $x_k(t)$ опять получаем уравнения (2.109), в которых $a^2 = n^2$, но в данном случае порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + n^2x_0 = f(t) \quad (2.113)$$

имеет периодическое решение лишь в случае отсутствия резонирующих членов в правой части, т. е. при выполнении условий (см. стр. 149)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

Если эти условия выполнены, то все решения уравнения (2.113) будут периодическими периода 2π (см. стр. 149)

$$x_0(t) = c_{10} \cos nt + c_{20} \sin nt + \varphi_0(t).$$

Функция $x_1(t)$ определяется из уравнения

$$\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0). \quad (2.114)$$

Это уравнение также имеет периодические решения лишь в случае отсутствия резонирующих членов в правой части, т. е. при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos nt \, dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin nt \, dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

Уравнения (2.115) содержат c_{10} и c_{20} , которые, вообще говоря, и определяются из этой системы.

Пусть c_{10} и c_{20} удовлетворяют системе (2.115); тогда все решения уравнения (2.114) имеют период 2π :

$$x_1(t) = c_{11} \cos nt + c_{21} \sin nt + \varphi_1(t), \quad (2.116)$$

причем c_{11} и c_{21} опять определяются из двух условий отсутствия резонирующих членов в следующем из уравнений (2.109):

$$\ddot{x}_2 + n^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}}$$

и т. д.

Следовательно, не каждому периодическому решению

$$x_0 = c_{10} \cos nt + c_{20} \sin nt + \varphi_0(t)$$

порождающего уравнения, а лишь некоторым, значения c_{10} и c_{20} которых удовлетворяют уравнениям (2.115), соответствуют периодические решения уравнения (2.107) при малых μ . Конечно, и в резонансном случае для того, чтобы, не находя общего члена ряда (2.110), быть

уверенным, что указанным процессом будет найдено периодическое решение, надо предварительно доказать теорему о существовании периодических решений. Это замечание относится и к случаям, изложенным в следующих пунктах 3 и 4.

3. Резонанс n -го рода. Иногда в системах, описываемых уравнением

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.107)$$

удовлетворяющим указанным выше условиям, наблюдаются интенсивные колебания, когда собственная частота мало отличается от $1/n$, где n — целое число. Это явление получило название резонанса n -го рода.

С математической точки зрения это означает, что при a , мало отличающемся от $1/n$, где n — целое число, большее единицы, уравнение (2.107) может иметь периодические решения периода $2\pi n$, не являющиеся в то же время периодическими решениями периода 2π .

Пусть

$$\ddot{x} + \frac{1}{n^2} x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \quad (2.117)$$

(если a мало отличается от $1/n$, точнее, $a^2 - (1/n^2) = \mu a_1$, где a_1 остается ограниченной при $\mu \rightarrow 0$, то, перенося член $(a^2 - (1/n^2))x$ в правую часть и включая его в $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$, получим уравнение вида (2.117)).

Ищем периодическое решение уравнения (2.117) периода $2\pi n$ в виде ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \quad (2.110)$$

Подставляя (2.110) в уравнение (2.117) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим уравнения (2.109) [стр. 152], в которых $a = 1/n$. Для определения $x_0(t)$ получаем порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + \frac{1}{n^2} x_0 = f(t), \quad (2.118)$$

которое имеет периодическое решение периода $2\pi n$ лишь при отсутствии в правой части резонирующих членов, т. е. при

$$\int_0^{2\pi n} f(t) \cos \frac{t}{n} dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi n} f(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0.$$

Если эти условия выполнены, то все решения уравнения (2.118) имеют период $2\pi n$

$$x_0 = c_{10} \cos \frac{t}{n} + c_{20} \sin \frac{t}{n} + \varphi_0(t),$$

где c_{10} и c_{20} — произвольные постоянные.

Уравнение, определяющее x_1 ,

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{n^2}x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, \mu), \quad (2.119)$$

будет иметь периодические решения периода $2\pi n$ лишь при отсутствии в правых частях резонирующих членов, т. е. при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, \mu) \cos \frac{t}{n} dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, \mu) \sin \frac{t}{n} dt &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

из которых, вообще говоря, определяются c_{10} и c_{20} .

Если условия (2.120) удовлетворяются, то все решения уравнения (2.119) имеют период $2\pi n$

$$x_1 = c_{11} \cos \frac{t}{n} + c_{21} \sin \frac{t}{n} + \varphi_1(t).$$

Для определения произвольных постоянных c_{11} и c_{21} пользуемся двумя условиями отсутствия резонирующих членов в следующем из уравнений (2.109) [стр. 152]:

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{n^2}x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}} \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \\ \mu=0}}$$

и т. д.

4. Автономный случай. Предположим, что правая часть уравнения (2.107) не зависит явно от t , и уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + a^2x = \mu F(x, \dot{x}, \mu), \quad (2.121)$$

где функция F удовлетворяет поставленным выше условиям. На первый взгляд может казаться, что исследование уравнения (2.121) должно быть проще исследования уравнения (2.107), в котором правая часть зависит от аргумента t , однако в действительности отсутствие аргумента t в правой части уравнения приводит к усложнению задачи.

Если правая часть явно зависит от t , то, как уже отмечалось выше, известны возможные периоды решений, так как периоды решений могут быть лишь равными или кратными периоду правой части вдоль решений по явно входящему аргументу t .

Если же правая часть не содержит t , то ее можно рассматривать как периодическую функцию произвольного периода и, следовательно, не исключена возможность существования решений любого периода, причем период решений, вообще говоря, будет функцией параметра μ . Ввиду того, что период решения $x(t, \mu)$ является, вообще говоря, функцией μ , было бы нецелесообразно искать решение в виде ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \cdots + \mu^n x_n(t) + \cdots, \quad (2.110)$$

так как каждая из функций $x_n(t)$ в отдельности не обязана быть периодической функцией и, следовательно, функции $x_n(t)$ не могли бы быть найдены рассмотренными выше методами. Поэтому надо преобразовать уравнение (2.121) к новому независимому переменному так, чтобы по новому переменному уравнение имело бы уже постоянный период, а уж затем искать решение в виде ряда (2.110).

Предварительно для упрощения преобразуем уравнение (2.121) заменой независимого переменного $t_1 = at$ к виду

$$\frac{d^2 x}{dt_1^2} + x = \mu F_1(x, \dot{x}, \mu). \quad (2.122)$$

Каждое решение порождающего уравнения $x_0(t_1) = c_1 \cos(t_1 - t_0)$ будет иметь период 2π , а периодические решения уравнения (2.122) при $\mu \neq 0$, если они существуют, будут иметь период $2\pi + \alpha(\mu)$, причем можно доказать, что $\alpha(\mu)$ является аналитической функцией μ при достаточно малом μ .

Разложим $\alpha(\mu)$ в ряд по степеням μ ; тогда

$$2\pi + \alpha(\mu) = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \cdots + h_n\mu^n + \cdots), \quad (2.123)$$

где h_j — некоторые, пока неизвестные нам постоянные величины.

Преобразуем переменные так, чтобы периодическое решение $x(t, \mu)$ уравнения (2.122) имело бы период не $2\pi + \alpha(\mu)$, а постоянный период 2π . Это достигается заменой переменных

$$t_1 = t_2(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \cdots + h_n\mu^n + \cdots), \quad (2.124)$$

так как, в силу зависимости (2.123), при изменении t_1 от 0 до $2\pi + \alpha(\mu)$ новое переменное t_2 изменяется от 0 до 2π . При этом уравнение (2.122)

преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{t_2 t_2} + (1 + h_1 \mu + \dots + h_n \mu^n + \dots)^2 x \\ = \mu (1 + h_1 \mu + \dots + h_n \mu^n + \dots)^2 \cdot F_1(x, (1 + h_1 \mu + \dots \\ + h_n \mu^n + \dots)^{-1} \dot{x}_{t_2}, \mu). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Периодическое решение этого уравнения ищем в виде

$$x(t_2, \mu) = x_0(t_2) + \mu x_1(t_2) + \dots + \mu^n x_n(t_2) + \dots, \quad (2.126)$$

где $x_n(t_2)$ — периодические функции аргумента t_2 периода 2π . Подставляя (2.126) в уравнение (2.125) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях равенства, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad \text{откуда} \quad x_0 = c \cos(t_2 - t_0), \\ \ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1 x_0 + F_1(x_0, \dot{x}_0, 0) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1 c \cos(t_2 - t_0) \\ + F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \end{aligned} \quad (2.127)$$

.

Для того чтобы уравнение (2.127) имело периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы в его правой части отсутствовали резонирующие члены (см. (2.106) [стр. 149]), т. е. чтобы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \sin(t_2 - t_0) dt_2 = 0, \\ -2h_1 c + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \\ \times \cos(t_2 - t_0) dt_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

Первое из этих уравнений дает возможность найти значения c , а второе — h_1 , определив которые, мы найдем те решения порождающего уравнения $x_0 = c \cos(t_2 - t_0)$, в окрестности которых при малом μ появляются периодические решения уравнения (2.122), и приближенно определим период искомого решения

$$2\pi + \alpha(\mu) \approx 2\pi(1 + h_1 \mu).$$

Зная c и h_1 , можно определить $x_1(t_2)$ и, если необходимо, тем же методом вычислить $x_2(t_2)$, $x_3(t_2)$ и т. д.

Пример 2.

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x}(9 - x^2). \quad (2.129)$$

Определить решения порождающего уравнения, к которым при $\mu \rightarrow 0$ приближаются периодические решения уравнения (2.129).

Решения порождающего уравнения имеют вид $x = c \cos(t - t_0)$. Для определения искомых значений c воспользуемся первым из уравнений (2.128):

$$\int_0^{2\pi} c(9 - c^2 \cos^2(t - t_0)) \sin^2(t - t_0) dt = 0$$

или $\pi c(9 - c^2/4) = 0$, откуда $c_1 = 0$, $c_{2,3} = \pm 6$.

При $c_1 = 0$ получаем тривиальное решение $x \equiv 0$ порождающего уравнения, которое остается решением уравнения (2.129) при любом μ .

При $c_{2,3} = \pm 6$ получаем $x = \pm 6 \cos(t - t_0)$.

Докажем простейшую из теорем А. Пуанкаре о существовании и единственности периодического решения, стремящегося при $\mu \rightarrow 0$ к периодическому решению порождающего уравнения, в применении к уравнению вида

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.130)$$

где функция f удовлетворяет условиям теоремы об аналитической зависимости решения от параметра μ (см. стр. 52) при достаточно малых по модулю значениях μ . Кроме того, предположим, что функция f явно зависит от t и имеет по t период 2π . Допустим также, что порождающее уравнение $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, 0)$ имеет единственное периодическое решение $x = \varphi_0(t)$ периода 2π .

Решение уравнения (2.130), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) + \beta_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{\varphi}_0(t_0) + \beta_1,$$

обозначим $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$. Следовательно, β_0 и β_1 являются отклонениями начальных значений решения $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ и его производной $\dot{x}(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ от начальных значений $\varphi_0(t_0)$ и $\dot{\varphi}_0(t_0)$ периодического решения порождающего уравнения.

Задача заключается в том, чтобы указать условия, при которых для каждого достаточно малого по модулю значения μ существует единственное периодическое решение $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ уравнения (2.130), стремящееся при $\mu \rightarrow 0$ к периодическому решению $\varphi_0(t)$ порождающего уравнения.

Если решение $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ является периодическим с периодом 2π , то, очевидно, должны удовлетворяться следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} x(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - x(0, \mu, \beta_0, \beta_1) &= 0, \\ \dot{x}(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - \dot{x}(0, \mu, \beta_0, \beta_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

Обозначая левые части этих уравнений соответственно $\Phi_0(\mu, \beta_0, \beta_1)$ и $\Phi_1(\mu, \beta_0, \beta_1)$, запишем систему (2.131) в виде

$$\begin{cases} \Phi_0(\mu, \beta_0, \beta_1) = 0, \\ \Phi_1(\mu, \beta_0, \beta_1) = 0. \end{cases} \quad (2.132)$$

Условия (2.132), называемые *условиями периодичности*, не только необходимы, но и достаточны для периодичности решения $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ уравнения (2.130). Действительно, в силу периодичности правой части уравнения (2.130) по t , эта правая часть в полосах $0 \leq t \leq 2\pi$, $2\pi \leq t \leq 4\pi$, ... принимает в точках (t, x, \dot{x}) , $(t + 2\pi, x, \dot{x})$, ... одинаковые значения. Следовательно, если в точках $t = 0$ и $t = 2\pi$ задать одинаковые начальные значения x_0 и \dot{x}_0 , то ими определяются в по-

лосах $0 \leq t \leq 2\pi$ и $2\pi \leq t \leq 4\pi$ совершенно одинаковые интегральные кривые (рис. 2.2), точнее, кривые, являющиеся периодическим продолжением одна другой.

По теореме о неявных функциях можно утверждать, что, если якобиан

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \neq 0$$

в точке $\mu = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то при каждом достаточно малом по модулю значении μ существует единственная пара функций $\beta_0(\mu)$ и $\beta_1(\mu)$, удовлетворяющих условиям периодичности (2.132) и стремящихся к нулю при $\mu \rightarrow 0$, т. е. в указанных условиях для каждого достаточно малого μ существует единственное периодическое решение уравнения (2.130), стремящееся к периодическому решению порождающего уравнения при $\mu \rightarrow 0$ ³⁾. Это утверждение и составляет содержание теоремы Пуанкаре.

Пример 3. Доказать, что в нерезонансном случае для уравнения

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.107)$$

где f и F удовлетворяют указанным выше условиям (см. стр. 151), выполнены требования теоремы о существовании и единственности периодического решения.

³⁾ Подробнее о теоремах существования периодических решений см. И. Г. Малкин [3].

Решение $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$, являющееся аналитической функцией последних трех аргументов при достаточно малых значениях этих аргументов, ищем в виде

$$x(t, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t) + x_{11}(t)\beta_0 + x_{12}(t)\beta_1 + x_{13}(t)\mu + \dots \quad (2.133)$$

Подставляя (2.133) в уравнение (2.107) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , β_0 и β_1 , получим для определения x_{11} и x_{12} следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{11} + a^2 x_{11} &= 0, & x_{11}(0) &= 1, & \dot{x}_{11}(0) &= 0, \\ \ddot{x}_{12} + a^2 x_{12} &= 0, & x_{12}(0) &= 0, & \dot{x}_{12}(0) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

(начальные значения получены из условий

$$\begin{aligned} x(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) &= x_0(t_0) + \beta_0, \\ \dot{x}(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) &= \dot{x}_0(t_0) + \beta_1), \end{aligned}$$

откуда

$$x_{11} = \cos at, \quad x_{12} = \frac{1}{a} \sin at.$$

Условия периодичности (2.132) имеют вид

$$\begin{aligned} (\cos 2a\pi - 1)\beta_0 + \frac{1}{a} \sin 2a\pi \beta_1 + \dots &= 0, \\ -a \sin 2a\pi \beta_0 + (\cos 2a\pi - 1)\beta_1 + \dots &= 0, \end{aligned}$$

где невыписанные члены не влияют на величину определителя

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \quad \text{при} \quad \mu = \beta_0 = \beta_1 = 0.$$

Определитель

$$\left. \frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \right|_{\mu=\beta_0=\beta_1=0} = (\cos 2a\pi - 1)^2 + \sin^2 2a\pi$$

отличен от нуля, так как a не равно целому числу.

§ 9. Понятие о краевых задачах

Как уже упоминалось во введении, наряду с основной начальной задачей часто приходится решать так называемые *краевые* или *граничные задачи*. В этих задачах значение искомой функции задается не в одной, а в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором

требуется определить решение. Например, в задаче о движении материальной точки массы m под действием заданной силы $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ часто требуется найти закон движения, если в начальный момент $t = t_0$ точка находилась в положении, характеризуемом радиусом-вектором \mathbf{r}_0 , а в момент $t = t_1$ должна попасть в точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$.

Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения движения

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

с краевыми условиями $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$.

Заметим, что эта задача имеет, вообще говоря, не единственное решение; если речь идет о баллистической задаче и о точках земной поверхности, то в одну и ту же точку тело может попасть по навесной и по настильной траектории (рис. 2.3), более того, при очень больших начальных скоростях можно попасть в ту же точку и после однократного или многократного облета земного шара.

Аналогичную краевую задачу можно поставить и для луча света, проходящего через преломляющую среду: найти направление, по которому луч света должен выйти из точки A , чтобы он попал в другую заданную точку B .

При этом очевидно, что задача не всегда имеет решение, а если решения существуют, то их может быть несколько и даже бесконечное множество (например, если лучи, выходящие из точки A , фокусируются в точке B).

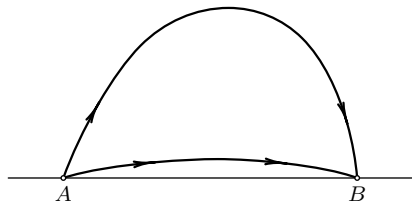


Рис. 2.3.

Если удастся найти общее решение дифференциального уравнения краевой задачи, то для решения этой задачи надо определить произвольные постоянные, содержащиеся в общем решении, из граничных условий. При этом, конечно, далеко не всегда существует действительное решение, а если существует, то оно не обязательно единственно.

В качестве примера возникающих здесь возможностей рассмотрим следующую краевую задачу:

Найти решение уравнения

$$y'' + y = 0, \quad (2.135)$$

удовлетворяющее условиям: $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$.

Общее решение уравнения (2.135) имеет вид

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Первое граничное условие удовлетворяется при $c_1 = 0$, при этом $y = c_2 \sin x$.

Если $x_1 \neq n\pi$, где n — целое число, то из второго граничного условия находим $y_1 = c_2 \sin x_1$, $c_2 = y_1 / \sin x_1$. Следовательно, в этом случае существует единственное решение краевой задачи

$$y = \frac{y_1}{\sin x_1} \sin x.$$

Если же $x_1 = n\pi$ и $y_1 = 0$, то все кривые пучка $y = c_2 \sin x$ являются графиками решений краевой задачи.

При $x_1 = n\pi$, $y_1 \neq 0$ решений краевой задачи не существует, так как ни одна кривая пучка $y = c_2 \sin x$ не проходит через точку (x_1, y_1) , где

$$x_1 = n\pi, \quad y_1 \neq 0.$$

Рассмотрим несколько подробнее краевые задачи для линейных уравнений второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \varphi(x), \quad (2.136)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (2.137)$$

Линейной заменой переменных

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0$$

краевые условия (2.137) сводятся к нулевым условиям $z(x_0) = z(x_1) = 0$, причем линейность уравнения (2.136) не нарушается.

Умножением на $e^{\int p_1(x) dx}$ линейное уравнение (2.136) приводится к виду

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad (2.138)$$

где $p(x) = e^{\int p_1(x) dx}$. Поэтому без существенного ограничения общности можно заменить изучение краевой задачи (2.136), (2.137) изучением краевой задачи для уравнения (2.138) с граничными условиями

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \quad (2.139)$$

Вначале рассмотрим краевую задачу (2.138), (2.139), причем $f(x)$ является локализованной в точке $x = s$ функцией с единичным импульсом. Точнее, рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f_\varepsilon(x, s) \quad (2.140)$$

с граничными условиями $y(x_0) = y(x_1) = 0$, где функция $f_\varepsilon(x, s)$ равна нулю на всем отрезке $[x_0, x_1]$, за исключением ε -окрестности точки $x = s$, $s - \varepsilon < x < s + \varepsilon$, причем

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(x, s) dx = 1.$$

Обозначим $G_\varepsilon(x, s)$ непрерывное решение этой краевой задачи и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(x, s) = G(x, s). \quad (2.141)$$

Нетрудно было бы доказать существование этого предела, не зависящего от выбора функции $f_\varepsilon(x, s)$, однако в этом нет необходимости, так как пока наши рассуждения носят эвристический характер, и на стр. 168 будет дано точное определение функции $G(x, s)$.

Функция $G(x, s)$ называется *функцией влияния* или *функцией Грина* рассматриваемой краевой задачи. Так же как на стр. 123–125, решение краевой задачи (2.138), (2.139) с непрерывной правой частью в (2.138) можно рассматривать как суперпозицию решений краевых задач, соответствующих локализованным в точке функциям с импульсами $f(s_i)\Delta s$, где s_i — точки деления отрезка $[x_0, x_1]$ на m равных частей, $\Delta s = (x_1 - x_0)/m$. Точнее, приближенное решение краевой задачи (2.138), (2.139) равно интегральной сумме

$$\sum_{i=1}^m G(x, s_i) f(s_i) \Delta s,$$

а предел этой суммы при $m \rightarrow \infty$:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s) ds \quad (2.142)$$

является решением рассматриваемой краевой задачи (2.138), (2.139).

Физический смысл функции влияния $G(x, s)$ и решения (2.142) станет еще яснее, если в уравнении (2.140) рассматривать $y(x)$ как смещение некоторой системы под влиянием непрерывно распределенной на отрезке $[x_0, x_1]$ силы $f(x)$ (например, отклонение струны от положения равновесия под влиянием распределенной нагрузки с плотностью $f(x)$). При этом $G(x, s)$ описывает смещение, вызываемое единичной сосредоточенной силой, приложенной к точке $x = s$, а решение (2.142) рассматривается как предел суммы решений, соответствующих сосредоточенным силам.

Функция Грина обладает следующими свойствами, вытекающими из ее определения (2.141):

1) $G(x, s)$ непрерывна по x при фиксированном s при $x_0 \leq x \leq x_1$, $x_0 < s < x_1$.

2) $G(x, s)$ является решением соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0$$

на всем отрезке $[x_0, x_1]$, за исключением точки $x = s$ (так как вне этой точки в случае локализованной в точке $x = s$ функции правая часть равна нулю).

3) $G(x, s)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0.$$

4) В точке $x = s$ производная $G'_x(x, s)$ должна иметь разрыв первого рода со скачком $1/p(s)$. Действительно, ожидать разрыва следует лишь в точке локализации функции — в точке $x = s$. Умножая тождество

$$\frac{d}{dx}(p(x)G'_\varepsilon(x, s)) + q(x)G_\varepsilon(x, s) \equiv f_\varepsilon(x, s)$$

на dx и интегрируя в пределах от $s - \varepsilon$ до $s + \varepsilon$, получим

$$p(x)G'_\varepsilon(x, s) \Big|_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} q(x)G_\varepsilon(x, s) dx = 1$$

и, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, будем иметь

$$[G'(s+0, s) - G'(s-0, s)] = \frac{1}{p(s)}.$$

Все наши рассуждения о функции Грина носили эвристический характер. Придадим теперь им необходимую точность.

Определение. Функцией Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.138), (2.139) называется функция, удовлетворяющая указанным выше условиям 1), 2), 3), 4).

Непосредственной подстановкой в уравнение (2.138) проверяем, что

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s) ds \quad (2.142)$$

является решением этого уравнения (краевые условия (2.139), очевидно, удовлетворяются в силу свойства 3)).

Действительно,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int_{x_0}^{x_1} G'_x(x, s) f(s) ds = \int_{x_0}^x G'_x(x, s) f(s) ds + \int_x^{x_1} G'_x(x, s) f(s) ds; \\ y''(x) &= \int_{x_0}^x G''_{xx}(x, s) f(s) ds + G'_x(x, x-0) f(x) \\ &\quad + \int_x^{x_1} G''_{xx}(x, s) f(s) ds - G'_x(x, x+0) f(x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x, s) f(s) ds + [G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x)] f(x). \end{aligned}$$

Подставляя (2.142) в уравнение (2.138), получим

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} [p(x) G''_{xx}(x, s) + p'(x) G'_x(x, s) + q(x) G(x, s)] dx \\ + p(x) [G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x)] f(x) \equiv f(x) \end{aligned}$$

в силу условий 2) и 4).

Рассмотрим метод построения функции Грина, из которого получим также достаточное условие ее существования.

Рассмотрим решение $y_1(x)$ уравнения

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0, \quad (2.143)$$

определяемое начальными условиями

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = y'_0 \neq 0.$$

Это решение, вообще говоря, не удовлетворяет второму граничному условию $y(x_1) = 0$. Случай $y_1(x_0) = y_1(x_1) = 0$ является исключительным, и мы его здесь рассматривать не будем.

Очевидно, что решения $c_1 y_1(x)$, где c_1 — произвольная постоянная, также удовлетворяют граничному условию $y(x_0) = 0$. Аналогично находим нетривиальное решение $y_2(x)$ уравнения (2.143), удовлетворяющее второму граничному условию $y_2(x_1) = 0$; этому же условию удовлетворяют все решения семейства $c_2 y_2(x)$, где c_2 — произвольная постоянная.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 y_1(x) & \text{при } x_0 \leq x \leq s, \\ c_2 y_2(x) & \text{при } s \leq x \leq x_1, \end{cases}$$

причем постоянные c_1 и c_2 выбираем так, чтобы были выполнены условия 1) и 4), т. е. чтобы функция $G(x, s)$ была непрерывна по x при фиксированном s , и в частности непрерывна в точке $x = s$:

$$c_1 y_1(s) = c_2 y_2(s), \quad (2.144)$$

и чтобы $G'_x(x, s)$ в точке $x = s$ имела скачок $1/p(s)$:

$$c_2 y'_2(s) - c_1 y'_1(s) = \frac{1}{p(s)}. \quad (2.145)$$

В силу предположения, что $y_1(x_1) \neq 0$, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как все линейно зависимые от $y_1(x)$ решения имеют вид $c_1 y_1(x)$ и, следовательно, при $c_1 \neq 0$ не обращаются в нуль в точке x_1 , в которой обращается в нуль решение $y_2(x)$. Следовательно, определитель системы (2.144) и (2.145), являющийся определителем Вронского: $W(y_1(x), y_2(x)) = W(x)$ в точке $x = s$, отличен от нуля, и постоянные c_1 и c_2 , удовлетворяющие системе (2.144) и (2.145), легко определяются:

$$c_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}, \quad c_2 = \frac{y_1(s)}{W(s)p(s)},$$

откуда

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{y_2(s)y_1(x)}{W(s)p(s)} & \text{при } x_0 \leq x \leq s, \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)p(s)} & \text{при } s < x \leq x_1. \end{cases} \quad (2.146)$$

Пример. Найти функцию Грина краевой задачи

$$y''(x) + y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Решения соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющие условиям $y(0) = 0$ и $y(\pi/2) = 0$, соответственно имеют вид $y_1 = c_1 \sin x$ и $y_2 = c_2 \cos x$, следовательно, согласно (2.146)

$$G(x, s) = \begin{cases} -\cos s \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ -\sin s \cos x & \text{при } s < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Замечание. Мы предположили (стр. 168), что не существует нетривиального решения $y(x)$ однородного уравнения (2.143), удовлетворяющего нулевым граничным условиям $y(x_0) = y(x_1) = 0$. Это условие гарантирует не только существование и единственность краевой задачи (2.138), (2.139), но и единственность функции Грина.

Действительно, если допустить существование двух различных функций Грина $G_1(x, s)$ и $G_2(x, s)$ для краевой задачи (2.138), (2.139), то получим два различных решения этой задачи:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_1(x, s) f(s) ds$$

и

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_2(x, s) f(s) ds,$$

разность которых

$$\int_{x_0}^{x_1} [G_1(x, s) - G_2(x, s)] f(s) ds,$$

вопреки предположению, будет нетривиальным решением соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющим нулевым граничным условиям.

Задачи к главе 2

1. $y'' - 6y' + 10y = 100$, причем при $x = 0$ $y = 10$, $y' = 5$.
2. $\ddot{x} + x = \sin t - \cos 2t$.

3. $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$.

4. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

5. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 2$.

6. $y'' + y = \operatorname{ch} x$.

7. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

8. $\frac{d^2 x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = e^t + e^{2t} + 1$.

9. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

10. $x^3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 1 = 0$.

11. $y^{\text{IV}} - 16y = x^2 - e^x$.

12. $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$.

13. $\frac{d^6 x}{dt^6} - \frac{d^4 x}{dt^4} = 1$.

14. $\frac{d^4 x}{dt^4} - 2\frac{d^2 x}{dt^2} + x = t^2 - 3$.

15. $y'' + 4xy = 0$; проинтегрировать с помощью степенных рядов.

16. $x^2 y'' + xy' + \left(9x^2 - \frac{1}{25}\right)y = 0$; проинтегрировать путем сведения к уравнению Бесселя.

17. $y'' + (y')^2 = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

18. $y'' = 3\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

19. $y'' + y = 1 - \frac{1}{\sin x}$.

20. $\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0$.

21. Найти скорость, с которой тело упадет на поверхность Земли, если считать, что оно падает с бесконечно большой высоты и движение происходит только под влиянием притяжения Земли. Радиус Земли считать равным 6400 км.

22. Найти закон движения тела, падающего без начальной скорости, допуская, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и что скорость имеет своим пределом при $t \rightarrow \infty$ величину 75 м/сек.

23. Цепь длиной 6 м соскальзывает со стола. В момент начала движения со стола свисал 1 м цепи. Во сколько времени со стола соскользнет вся цепь? (Трением пренебрегаем.)

24. Цепь переброшена через гладкий гвоздь. В момент начала движения с одной стороны свисает 8 м цепи, а с другой стороны 10 м цепи. Во сколько времени вся цепь соскользнет с гвоздя? (Трением пренебрегаем.)

25. Поезд движется по горизонтальному пути. Вес поезда P , сила тяги паровоза F , сила сопротивления при движении $W = a + bv$, где a и b — постоянные, а v — скорость поезда; s — пройденный путь. Определить закон движения поезда, считая, что при $t = 0$ $s = 0$ и $v = 0$.

26. Груз в p кг подвешен на пружине и оттянул ее на a см. Затем пружина оттягивается еще на A см и отпускается без начальной скорости. Найти закон движения пружины, пренебрегая сопротивлением среды.

27. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти закон движения одного из грузов, если другой оборвется. Дано, что удлинение пружины под влиянием одного из грузов равно a см.

28. Материальная точка массы m отталкивается от центра O с силой, пропорциональной расстоянию. Сопротивление среды пропорционально скорости движения. Найти закон движения.

29. Найти периодическое решение с периодом 2π уравнения

$$\ddot{x} + 2x = f(t),$$

где функция $f(t) = \pi^2 t - t^3$ при $-\pi < t \leq \pi$ и далее продолжена периодически.

30. $yy'' + (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$

31. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2.$

32. $\ddot{x} + 9x = t \sin 3t.$

33. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x.$

34. $y''' - y = e^x.$

35. $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x.$

36. $(x^2 - 1)y'' - 6y = 1$. Частное решение соответствующего однородного уравнения имеет вид многочлена.

37. Найти решение $u = u(x^2 + y^2)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

зависящее лишь от $x^2 + y^2$.

38. Найти решение $u = u(x^2 + y^2 + z^2)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

являющееся функцией $x^2 + y^2 + z^2$.

39. Материальная точка медленно погружается в жидкость. Найти закон движения, считая, что при медленном погружении сопротивление жидкости пропорционально скорости погружения.

40. Проинтегрировать уравнение движения $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, считая, что правая часть является функцией только x или только \dot{x} :

а) $m\ddot{x} = f(x)$;

б) $m\ddot{x} = f(\dot{x})$.

41. $y^{\text{VI}} - 3y^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} - y''' = x$.

42. $x^{\text{IV}} + 2x'' + x = \cos t$.

43. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 2 \cos \ln(1+x)$.

44. Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^4}.$$

45. Определить периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t),$$

где a_1 и a_2 — постоянные, а $f(t)$ — непрерывная периодическая функция периода 2π , разлагающаяся в ряд Фурье, $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$.

46. $\ddot{x} + 3x = \cos t + \mu \dot{x}^2$, μ — малый параметр. Приближенно определить периодическое решение.

47. $x^3 y'' - xy' + y = 0$; проинтегрировать уравнение, если $y_1 = x$ является частным решением.

48. Найти линейное однородное уравнение, имеющее следующую фундаментальную систему решений: $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$.

49. $x^{\text{IV}} + x = t^3$.

50. $x = (y'')^3 + y'' + 1$.

51. $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 2^t + te^{-5t}$.

52. $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$.

53. $y^{\text{VI}} - y = e^{2x}$.

54. $y^{\text{VI}} + 2y^{\text{IV}} + y'' = x + e^x$.

55. $6y''y^{\text{IV}} - 5(y''')^2 = 0$.

56. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

57. $y'' + y = \sin 3x \cos x$.

58. $y'' = 2y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

59. $yy'' - (y')^2 = y'$.

Г Л А В А 3

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Общие понятия

Уравнение движения материальной точки массы m под действием силы $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

путем проектирования на оси координат может быть заменено системой трех скалярных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{aligned}$$

или системой шести уравнений первого порядка, если за неизвестные функции считать не только координаты x, y, z движущейся точки, но и проекции $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ее скорости $d\mathbf{r}/dt$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{z} &= w; \\ m\dot{u} &= X(t, x, y, z, u, v, w), \\ m\dot{v} &= Y(t, x, y, z, u, v, w), \\ m\dot{w} &= Z(t, x, y, z, u, v, w). \end{aligned}$$

При этом обычно задаются начальное положение точки $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$ и начальная скорость $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, $w(t_0) = w_0$.

или кратко $X = X(t)$, определяет в евклидовом пространстве с координатами t, x_1, x_2, \dots, x_n некоторую кривую, называемую *интегральной кривой*. При выполнении условий 1) и 2) теоремы существования и единственности через каждую точку этого пространства проходит единственная интегральная кривая и их совокупность образует n -параметрическое семейство, в качестве параметров этого семейства могут быть взяты, например, начальные значения $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$.

Возможна и другая интерпретация решений

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t),$$

или кратко $X = X(t)$, особенно удобная, если правые части системы (3.1) не зависят явно от t .

В евклидовом пространстве с прямоугольными координатами x_1, x_2, \dots, x_n решение $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ определяет закон движения по некоторой траектории в зависимости от изменения параметра t , который при этой интерпретации мы будем считать временем. При такой интерпретации производная dX/dt будет скоростью движения точки, а $dx_1/dt, dx_2/dt, \dots, dx_n/dt$ — координатами скорости той же точки. При этой интерпретации, весьма удобной и естественной во многих физических и механических задачах, система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.1)$$

или

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X)$$

обычно называется *динамической*, пространство с координатами x_1, x_2, \dots, x_n называется *фазовым*, а кривая $X = X(t)$ — *фазовой траекторией*.

Динамическая система (3.1) в заданный момент времени t определяет в пространстве x_1, x_2, \dots, x_n поле скоростей. Если вектор-функция F зависит явно от t , то поле скоростей меняется с течением времени и фазовые траектории могут пересекаться. Если же вектор-функция F , или, что то же самое, все функции f_i , не зависят явно от t , то поле скоростей стационарно, т. е. не изменяется с течением времени, и движение будет установившимся.

В последнем случае, если условия теоремы существования и единственности выполнены, через каждую точку фазового пространства (x_1, x_2, \dots, x_n) будет проходить лишь одна траектория. Действительно, в этом случае по каждой траектории $X = X(t)$ совершается

бесконечное множество различных движений $X = X(t + c)$, где c — произвольная постоянная, в чем легко убедиться, совершив замену переменных $t_1 = t + c$, при которой динамическая система не изменит своего вида:

$$\frac{dX}{dt_1} = F(X),$$

и, следовательно, $X = X(t_1)$ будет ее решением, или в прежних переменных $X = X(t + c)$.

Если бы через некоторую точку X_0 фазового пространства в рассматриваемом случае проходили две траектории

$$X = X_1(t) \quad \text{и} \quad X = X_2(t), \quad X_1(\bar{t}_0) = X_2(\bar{\bar{t}}_0) = X_0,$$

то, взяв на каждой из них то движение, при котором точка X_0 достигается в момент времени $t = t_0$, т. е., рассматривая решения

$$X = X_1(t - t_0 + \bar{t}_0) \quad \text{и} \quad X = X_2(t - t_0 + \bar{\bar{t}}_0),$$

получим противоречие с теоремой существования и единственности, так как два различных решения $X_1(t - t_0 + \bar{t}_0)$ и $X_2(t - t_0 + \bar{\bar{t}}_0)$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию $X(t_0) = X_0$.

Пример. Система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad (3.3)$$

имеет, как нетрудно проверить непосредственной постановкой, следующее семейство решений:

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos(t - c_2), \\ y &= -c_1 \sin(t - c_2). \end{aligned}$$

Рассматривая t как параметр, получим на фазовой плоскости x, y семейство окружностей с центром в начале координат (стр. 3.1). Правая часть системы (3.3) не зависит от t и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, поэтому траектории не пересекаются. Фиксируя c_1 , получим определенную траекторию, причем различным c_2 будут соответствовать различные движения по этой траектории. Уравнение траектории $x^2 + y^2 = c_1^2$ не зависит от c_2 , так что все движения при фиксированном c_1 совершаются по одной и той же траектории. При $c_1 = 0$ фазовая траектория состоит из одной точки, называемой в этом случае *точкой покоя* системы (3.3).

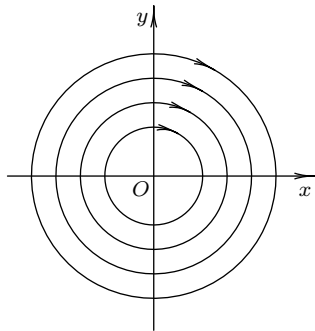


Рис. 3.1.

§ 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка

Один из основных методов интегрирования системы дифференциальных уравнений заключается в следующем: из уравнений системы (3.1) и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение более высокого порядка, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции, по возможности без интегриаций, определяются из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования.

Иллюстрируем сказанное примерами.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Дифференцируем одно из уравнений, например первое, $d^2x/dt^2 = dy/dt$ и, исключая dy/dt с помощью второго уравнения, получим $d^2x/dt^2 - x = 0$, откуда $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$. Используя первое уравнение, получаем $y = dx/dt = c_1e^t - c_2e^{-t}$.

Мы определили y без интегриаций с помощью первого уравнения. Если бы мы определили y из второго уравнения

$$\frac{dy}{dt} = x = c_1e^t + c_2e^{-t}, \quad y = c_1e^t - c_2e^{-t} + c_3,$$

то ввели бы лишние решения, так как непосредственная подстановка в исходную систему уравнений показывает, что системе удовлетворяют функции $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$, $y = c_1e^t - c_2e^{-t} + c_3$ не при произвольном c_3 , а лишь при $c_3 = 0$.

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \tag{3.4_1}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y. \tag{3.4_2}$$

Дифференцируем второе уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}. \tag{3.5}$$

Из уравнений (3.4₂) и (3.5) определяем x и dx/dt :

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} + y \right), \tag{3.6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \right).$$

и еще одно тождество

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.8)$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения переменных определитель

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Тогда систему (3.7) можно разрешить относительно x_2, x_3, \dots, x_n , выразив их через переменные $t, x_1, dx_1/dt, \dots, d^{n-1}x_1/dt^{n-1}$. Подставив найденные из системы (3.7) переменные x_2, x_3, \dots, x_n в последнее уравнение (3.8), получим уравнение n -го порядка

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi \left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} \right), \quad (3.8_1)$$

которому удовлетворяет функция $x_1(t)$, являвшаяся по предположению функцией $x_1(t)$ решения $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ системы (3.1).

Докажем теперь, что если взять любое решение $x_1(t)$ полученного уравнения n -го порядка (3.8₁), подставить его в систему (3.7) и определить из этой системы $x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$, то система функций

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \quad (3.9)$$

будет решением системы (3.1).

Подставим найденную систему функций (3.9) в систему (3.7) и тем самым обратим все уравнения этой системы в тождества; в частности, получим тождество

$$\frac{dx_1}{dt} \equiv f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.7_1)$$

Дифференцируя это тождество по t , будем иметь:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \quad (3.10)$$

В этом тождестве пока нельзя заменить dx_i/dt функциями f_i , так как мы еще не доказали, что полученные указанным выше путем из уравнения (3.8) и системы (3.7) функции x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют

Принимая во внимание еще (3.7₁), получаем, что n функций x_1, x_2, \dots, x_n являются решением системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Замечание 1. Указанный здесь процесс исключения всех функций, кроме одной, предполагает, что

$$\frac{D(f_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} \neq 0. \quad (3.12)$$

Если это условие не выполнено, то можно применить тот же процесс, но вместо функции x_1 взять какую-нибудь другую из функций x_2, x_3, \dots, x_n , входящих в решение системы (3.1). Если же условие (3.12) не выполняется при любом выборе вместо x_1 какой-нибудь функции из x_2, x_3, \dots, x_n , то возможны различные исключительные случаи, которые мы иллюстрируем следующими примерами.

Пример 4.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_2), \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(t, x_3). \end{aligned}$$

Система распалась на совершенно независимые между собой уравнения, каждое из которых приходится интегрировать отдельно.

Пример 5.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_2, x_3), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \neq 0, \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(t, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Два последних уравнения можно указанным выше методом свести к одному уравнению второго порядка, но первое уравнение, содержащее неизвестную функцию x_1 , не входящую в остальные уравнения, надо интегрировать отдельно.

Замечание 2. Если применить указанный выше процесс исключения всех неизвестных функций, кроме одной, к системе

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

называемой линейной однородной, то, как нетрудно проверить, уравнение n -го порядка

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi \left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} \right) \quad (3.8_1)$$

тоже будет линейным однородным, причем если все коэффициенты a_{ij} были постоянными, то и уравнение (3.8₁) будет линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами. Аналогичное замечание справедливо и для линейной неоднородной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

для которой уравнение (3.8₁) будет линейным неоднородным уравнением n -го порядка.

§ 3. Нахождение интегрируемых комбинаций

Интегрирование систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

нередко осуществляется путем подбора так называемых интегрируемых комбинаций.

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений (3.1), но уже легко интегрирующееся, например являющееся уравнением вида

$$d\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

или уравнением, сводящимся заменой переменных к какому-нибудь интегрируемому типу уравнений с одной неизвестной функцией.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Складывая почленно данные уравнения, находим одну интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x+y \quad \text{или} \quad \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

откуда

$$\ln |x+y| = t + \ln c_1, \quad x+y = c_1 e^t.$$

Почленно вычитая из первого уравнения системы второе, получаем вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y) \quad \text{или} \quad \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt,$$

$$\ln |x-y| = -t + \ln c_2, \quad x-y = c_2 e^{-t}.$$

Итак, найдено два конечных уравнения:

$$x+y = c_1 e^t \quad \text{и} \quad x-y = c_2 e^{-t},$$

из которых может быть определено решение исходной системы

$$x = \frac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t})$$

или

$$x = \bar{c}_1 e^t + \bar{c}_2 e^{-t}, \quad y = \bar{c}_1 e^t - \bar{c}_2 e^{-t}.$$

Одна интегрируемая комбинация дает возможность получить одно конечное уравнение

$$\Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1,$$

связывающее неизвестные функции и независимое переменное; такое конечное уравнение называется *первым интегралом системы* (3.1).

Итак, первым интегралом

$$\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c \tag{3.13}$$

системы уравнений (3.1) называется конечное уравнение, обращающееся в тождество при некотором значении c , если вместо $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) подставлено решение системы (3.1).

Часто первым интегралом называют также левую часть $\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнения (3.13), и тогда первый интеграл определяется как функция, не равная тождественно постоянной, но сохраняющая постоянное значение вдоль интегральных кривых системы (3.1).

Геометрически первый интеграл $\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ при фиксированном c можно интерпретировать как n -мерную поверхность в $(n+1)$ -мерном пространстве с координатами t, x_1, x_2, \dots, x_n , обладающую тем свойством, что каждая интегральная кривая, имеющая общую точку с этой поверхностью, целиком лежит на поверхности. При переменном c получаем семейство непересекающихся поверхностей, обладающих тем же свойством, т. е. состоящих из точек некоторого $(n-1)$ -параметрического семейства интегральных кривых системы (3.1).

Пример 3.

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr, \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq,$$

где A , B и C — постоянные (эта система встречается в теории движения твердого тела). Умножая первое уравнение на p , второе на q , третье на r и складывая, получим

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда находим первый интеграл

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = c_1.$$

Умножая первое уравнение на Ap , второе на Bq , третье на Cr и складывая, будем иметь

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0,$$

и, интегрируя, получим еще один первый интеграл

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = c_2.$$

Если исключить случай $A = B = C$, при котором система интегрируется непосредственно, то найденные первые интегралы независимы и, следовательно, пользуясь этими первыми интегралами, можно исключить две неизвестные функции, причем для определения третьей функции получим одно уравнение с разделяющимися переменными.

Для нахождения интегрируемых комбинаций часто удобно переходить к так называемой симметрической форме записи системы уравнений (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots \\ &= \frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dt}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В системе, заданной в симметрической форме, переменные входят равноправно, что иногда облегчает нахождение интегрируемых комбинаций.

Пример 4.

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}. \quad (3.16)$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz},$$

находим $y/z = c_1$. Умножая числители и знаменатели первого из отношений системы (3.16) на x , второго на y , третьего на z и составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy},$$

откуда

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln |y| + \ln c_2,$$

или

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2.$$

Найденные независимые первые интегралы

$$\frac{y}{z} = c_1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$$

определяют искомые интегральные кривые.

§ 4. Системы линейных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных. Система n линейных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.17)$$

или в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \quad (3.18)$$

где X есть n -мерный вектор с координатами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, F есть n -мерный вектор с координатами $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$, которые

удобно в дальнейшем рассматривать как одностолбцовые матрицы:

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{vmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц строки первого множителя должны умножаться на столбец второго, следовательно,

$$AX = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{vmatrix}, \quad AX + F = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + f_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + f_n \end{vmatrix}.$$

Равенство матриц означает равенство всех их элементов, следовательно, одно матричное уравнение (3.18) или

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + f_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + f_n \end{vmatrix}$$

эквивалентно системе (3.17).

Если все функции $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ в (3.17) непрерывны на отрезке $a \leq t \leq b$, то в достаточно малой окрестности каждой точки $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, где $a \leq t_0 \leq b$, выполнены условия теоремы существования и единственности (см. стр. 175) и, следовательно, через каждую такую точку проходит единственная интегральная кривая системы (3.17).

Действительно, в рассматриваемом случае правые части системы (3.17) непрерывны, и их частные производные по любому x_j ограничены, так как эти частные производные равны непрерывным на отрезке $a \leq t \leq b$ коэффициентам $a_{ij}(t)$.

Определим *линейный оператор* L равенством

$$L[X] = \frac{dX}{dt} - AX,$$

тогда уравнение (3.18) еще короче можно записать в виде

$$L[X] = F. \quad (3.19)$$

Если все $f_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), или, что то же самое, матрица $F = 0$, то система (3.17) называется *линейной однородной*. В краткой записи линейная однородная система имеет вид

$$L[X] = 0. \quad (3.20)$$

Оператор L обладает следующими двумя свойствами:

$$1) \quad L[cX] = cL[X],$$

где c — произвольная постоянная.

$$2) \quad L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2].$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d(cX)}{dt} - A(cX) &\equiv c \left[\frac{dX}{dt} - AX \right], \\ \frac{d(X_1 + X_2)}{dt} - A(X_1 + X_2) &\equiv \left(\frac{dX_1}{dt} - AX_1 \right) + \left(\frac{dX_2}{dt} - AX_2 \right). \end{aligned}$$

Следствием свойств 1) и 2) является

$$L \left[\sum_{i=1}^m c_i X_i \right] \equiv \sum_{i=1}^m c_i L[X_i],$$

где c_i — произвольные постоянные.

Теорема 3.1. Если X является решением линейной однородной системы $L[X] = 0$, то cX , где c — произвольная постоянная, является решением той же системы.

Доказательство. Дано $L[X] \equiv 0$, надо доказать, что $L[cX] \equiv 0$. Пользуясь свойством 1) оператора L , получим

$$L[cX] \equiv cL[X] \equiv 0.$$

Теорема 3.2. Сумма $X_1 + X_2$ двух решений X_1 и X_2 однородной линейной системы уравнений является решением той же системы.

Доказательство. Дано $L[X_1] \equiv 0$ и $L[X_2] \equiv 0$.

Требуется доказать, что $L[X_1 + X_2] \equiv 0$.

Пользуясь свойством 2) оператора L , получим

$$L[X_1 + X_2] \equiv L[X_1] + L[X_2] \equiv 0.$$

Следствие теорем 3.1 и 3.2. Линейная комбинация $\sum_{i=1}^m c_i X_i$ с произвольными постоянными коэффициентами решений X_1, X_2, \dots, X_m линейной однородной системы $L[X] = 0$ является решением той же системы.

Теорема 3.3. Если линейная однородная система (3.20) с действительными коэффициентами $a_{ij}(t)$ имеет комплексное решение $X = U + iV$, то действительная и мнимая части

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad u \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

в отдельности являются решениями той же системы.

Доказательство. Дано $L[U + iV] \equiv 0$. Надо доказать, что

$$L[U] \equiv 0 \quad \text{и} \quad L[V] \equiv 0.$$

Пользуясь свойствами 1) и 2) оператора L , получаем

$$L[U + iV] \equiv L[U] + iL[V] \equiv 0.$$

Следовательно, $L[U] \equiv 0$ и $L[V] \equiv 0$.

Векторы X_1, X_2, \dots, X_n , где

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix},$$

называются *линейно зависимыми* на отрезке $a \leq t \leq b$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n \equiv 0 \quad (3.21)$$

при $a \leq t \leq b$, причем по крайней мере одно $\alpha_i \neq 0$. Если же тождество (3.21) справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то векторы X_1, X_2, \dots, X_n называются *линейно независимыми*.

Заметим, что одно векторное тождество (3.21) эквивалентно n тождествам:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{1i}(t) &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{2i}(t) &\equiv 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{ni}(t) &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.21_1)$$

Если векторы X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) линейно зависимы и значит существует нетривиальная система α_i (т.е. не все α_i равны нулю), удовлетворяющая системе n линейных однородных по отношению к α_i уравнений (3.21₁), то определитель системы (3.21₁)

$$W = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

должен быть равен нулю для всех значений t отрезка $a \leq t \leq b$. Этот определитель системы называют *определителем Вронского* для системы векторов X_1, X_2, \dots, X_n .

Теорема 3.4. Если определитель Вронского W решений X_1, X_2, \dots, X_n линейной однородной системы уравнений (3.20) с непрерывными на отрезке $a \leq t \leq b$ коэффициентами $a_{ij}(t)$ равен нулю хотя бы в одной точке $t = t_0$ отрезка $a \leq t \leq b$, то решения X_1, X_2, \dots, X_n линейно зависимы на том же отрезке, и, следовательно, на рассматриваемом отрезке $W \equiv 0$.

Доказательство. Так как коэффициенты $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) непрерывны, то система (3.20) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Следовательно, начальное значение

$X(t_0) = 0$ (или, подробнее, $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0, \dots, x_n(t_0) = 0$) определяет единственное решение рассматриваемой системы и этим решением, очевидно, является тривиальное решение системы (3.20) $X(t) \equiv 0$ (или, подробнее, $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0, \dots, x_n(t) \equiv 0$). Определитель $W(t_0) = 0$. Следовательно, существует нетривиальная система c_1, c_2, \dots, c_n , удовлетворяющая уравнению

$$c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \dots + c_n X_n(t_0) \equiv 0,$$

так как это одно векторное уравнение эквивалентно системе n линейных однородных относительно c_i уравнений с равным нулю определителем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i x_{1i}(t_0) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n c_i x_{2i}(t_0) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n c_i x_{ni}(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующее этой нетривиальной системе c_1, c_2, \dots, c_n решение уравнения (3.20) $X(t) = \sum_{i=1}^n c_i X_i(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям $X(t_0) = 0$ и, следовательно, совпадает с тривиальным решением системы (3.20):

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i(t) \equiv 0,$$

т. е. X_i линейно зависимы.

З а м е ч а н и е. Эта теорема, как показывают простейшие примеры, не распространяется на произвольные векторы X_1, X_2, \dots, X_n , не являющиеся решениями системы (3.20) с непрерывными коэффициентами.

П р и м е р 1. Система векторов

$$X_1 = \begin{vmatrix} t \\ t \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad X_2 = \begin{vmatrix} t^2 \\ t^2 \end{vmatrix}$$

линейно независима, так как из

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \equiv 0$$

независимой системы решений X_1, X_2, \dots, X_n и, следовательно, не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $a \leq t \leq b$.

Пример 2.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Нетрудно проверить, что системе (3.22) удовлетворяют решения

$$x_1 = \cos t, \quad y_1 = -\sin t \quad \text{и} \quad x_2 = \sin t, \quad y_2 = \cos t.$$

Эти решения линейно независимы, так как определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

отличен от нуля. Следовательно, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Теорема 3.6. Если \tilde{X} является решением линейной неоднородной системы

$$L[X] = F, \quad (3.19)$$

а X_1 — решением соответствующей однородной системы $L[X] = 0$, то сумма $X_1 + \tilde{X}$ также будет решением неоднородной системы $L[X] = F$.

Доказательство. Дано, что $L[\tilde{X}] \equiv F$ и $L[X_1] \equiv 0$. Надо доказать, что $L[X_1 + \tilde{X}] \equiv F$.

Пользуясь свойством 2) [стр. 190] оператора L , получим

$$L[X_1 + \tilde{X}] \equiv L[X_1] + L[\tilde{X}] \equiv F.$$

Теорема 3.7. Общее решение на отрезке $a \leq t \leq b$ неоднородной системы (3.19) с непрерывными на том же отрезке коэффициентами $a_{ij}(t)$ и правыми частями $f_i(t)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ соответствующей однородной системы и частного решения \tilde{X} рассматриваемой неоднородной системы.

является сумма $\sum_{i=1}^m X_i$ решений X_i уравнений

$$L[X_i] = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Доказательство. Дано $L[X_i] \equiv F_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$. Надо доказать, что

$$L\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^m F_i.$$

Используя свойство 2) [стр. 190] оператора L , получим

$$L\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^m L[X_i] \equiv \sum_{i=1}^m F_i.$$

Замечание. Теорема 3.8 без изменения доказательства, очевидно, распространяется и на тот случай, когда $m \rightarrow \infty$, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ сходится и допускает почленное дифференцирование.

Теорема 3.9. Если система линейных уравнений

$$L[X] = U + iV,$$

где

$$U = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix},$$

с действительными функциями $a_{ij}(t)$, $u_i(t)$, $v_i(t) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$ имеет решение

$$X = \tilde{U} + i\tilde{V}, \quad \tilde{U} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{vmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{vmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{vmatrix},$$

то действительная часть решения \tilde{U} и его мнимая часть \tilde{V} соответственно являются решениями уравнений

$$L[X] = U \quad \text{и} \quad L[X] = V.$$

Доказательство. Дано $L[\tilde{U} + i\tilde{V}] \equiv U + iV$, надо доказать, что $L[\tilde{U}] \equiv U$, $L[\tilde{V}] \equiv V$.

Пользуясь свойствами 1) и 2) [стр. 190] оператора L , получаем

$$L[\tilde{U} + i\tilde{V}] \equiv L[\tilde{U}] + iL[\tilde{V}] \equiv U + iV.$$

Следовательно, $L[\tilde{U}] \equiv U$ и $L[\tilde{V}] \equiv V$.

Если известно общее решение соответствующей однородной системы $L(X) = 0$, но подобрать частное решение неоднородной системы $L(X) = F$ не удается и, следовательно, нельзя воспользоваться теоремой 3.7, то можно применить метод вариации постоянных.

Пусть $X = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ является при произвольных постоянных c_i общим решением соответствующей однородной системы

$$\frac{dX}{dt} - AX = 0$$

и, следовательно, X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — линейно независимые частные решения той же однородной системы. Решение неоднородной системы

$$\frac{dX}{dt} - AX = F$$

ищем в виде

$$X = \sum_{i=1}^n c_i(t) X_i,$$

где $c_i(t)$ — новые неизвестные функции. Подстановка в неоднородное уравнение дает

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) X_i + \sum_{i=1}^n c_i(t) \frac{dX_i}{dt} = A \sum_{i=1}^n c_i(t) X_i + F,$$

или, так как $dX_i/dt \equiv AX_i$, получим

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) X_i = F.$$

Это векторное уравнение эквивалентно системе n уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n c'_i(t) x_{1i} &= f_1(t), \\ \sum_{i=1}^n c'_i(t) x_{2i} &= f_2(t), \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n c'_i(t) x_{ni} &= f_n(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Из этой системы n уравнений с n неизвестными $c'_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) с определителем системы W , совпадающим с определителем Вронского для линейно независимых решений X_1, X_2, \dots, X_n и, следовательно, отличным от нуля, определяются все $c'_i(t)$:

$$c'_i(t) = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

откуда, интегрируя, находим неизвестные функции $c_i(t)$:

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t) dt + \bar{c}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пример 3.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}.$$

Общее решение соответствующей однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

имеет вид $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$ (см. пример 2 [стр. 195]). Варьируем постоянные

$$\begin{aligned} x &= c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \\ y &= -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t. \end{aligned}$$

$c'_1(t)$ и $c'_2(t)$ определяются из системы (3.24), имеющей в данном случае вид

$$\begin{aligned} c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t &= 0, \\ -c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t &= \frac{1}{\cos t}, \end{aligned}$$

откуда

$$c'_1(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}, \quad c'_2(t) = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \ln |\cos t| + \bar{c}_1, \\ c_2(t) &= t + \bar{c}_2 \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\begin{aligned} x &= \bar{c}_1 \cos t + \bar{c}_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t, \\ y &= -\bar{c}_1 \sin t + \bar{c}_2 \cos t - \sin t \ln |\cos t| + t \cos t. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта система n линейных однородных уравнений с n неизвестными α_j ($j = 1, 2, \dots, n$) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (3.26) был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (3.27)$$

Из этого уравнения степени n определяются значения k , при которых система (3.26) имеет нетривиальные решения α_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Уравнение (3.27) называется *характеристическим*. Если все корни характеристического уравнения k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) различны, то, подставляя их по очереди в систему (3.26), определяем соответствующие им нетривиальные значения $\alpha_j^{(i)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) и, следовательно, находим n решений исходной системы (3.25) в виде

$$x_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{k_i t}, \quad x_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{k_i t}, \quad \dots, \quad x_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.28)$$

где верхний индекс указывает номер решения, а нижний индекс — номер неизвестной функции.

Пользуясь векторными обозначениями, получим тот же результат еще короче:

$$\frac{dX}{dt} = AX; \quad (3.25_1)$$

ищем решение в виде

$$X = \tilde{A} e^{kt}, \quad \text{где} \quad \tilde{A} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix},$$

$$\tilde{A} k e^{kt} = A \tilde{A} e^{kt},$$

или

$$(A - kE) \tilde{A} = 0, \quad (3.29)$$

где E — единичная матрица:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы уравнению (3.29) удовлетворяла нетривиальная матрица \tilde{A}

$$\tilde{A} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица $A - kE$ была бы особой, т. е. чтобы ее определитель был равен нулю: $|A - kE| = 0$. Для каждого корня k_i этого характеристического уравнения $|A - kE| = 0$ из (3.29) определяем не равную нулю матрицу $\tilde{A}^{(i)}$ и, если все корни k_i характеристического уравнения различны, получаем n решений:

$$X_1 = \tilde{A}^{(1)} e^{k_1 t}, \quad X_2 = \tilde{A}^{(2)} e^{k_2 t}, \quad \dots, \quad X_n = \tilde{A}^{(n)} e^{k_n t},$$

где

$$\tilde{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Эти решения, как нетрудно показать, линейно независимы. Действительно, если бы существовала линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t} = 0,$$

или в развернутой форме

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_1^{(i)} e^{k_i t} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_2^{(i)} e^{k_i t} &\equiv 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

то, в силу линейной независимости функций $e^{k_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (см. стр. 95), из (3.30) следовало бы, что

$$\left. \begin{aligned} \beta_i \alpha_1^{(i)} &= 0, \\ \beta_i \alpha_2^{(i)} &= 0, \\ &\dots \\ \beta_i \alpha_n^{(i)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.31)$$

Но так как при каждом i хотя бы одно из $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) отлично от нуля, то из (3.31) следует, что $\beta_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Итак, решения $\tilde{A}^{(i)} e^{k_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) линейно независимы и общее решение системы (3.25) имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t},$$

или

$$x_j = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_j^{(i)} e^{k_i t} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где c_i — произвольные постоянные.

Постоянные $\alpha_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) определяются из системы (3.26) при $k = k_i$ неоднозначно, так как определитель системы равен нулю и, следовательно, по крайней мере одно уравнение является следствием остальных. Неоднозначность определения $\alpha_j^{(i)}$ связана с тем, что решение системы линейных однородных уравнений остается решением той же системы при умножении на произвольный постоянный множитель.

Комплексному корню характеристического уравнения (3.27) $k_j = p + qi$ соответствует решение

$$X_j = \tilde{A}^{(j)} e^{k_j t}, \quad (3.32)$$

которое, если все коэффициенты a_{ij} действительны, может быть заменено двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями решения (3.32) (см. стр. 191). Комплексный сопряженный корень характеристического уравнения $k_{j+1} = p - qi$ не даст новых линейно независимых действительных решений.

Если характеристическое уравнение имеет кратный корень k_s кратности γ , то, принимая во внимание, что систему уравнений (3.25) можно свести процессом, указанным на стр. 179, к одному линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами n -го или более

низкого порядка (см. замечания на стр. 183), можно утверждать, что решение системы (3.25) имеет вид

$$X(t) = (\tilde{A}_0^{(s)} + \tilde{A}_1^{(s)}t + \dots + \tilde{A}_{\gamma-1}^{(s)}t^{\gamma-1})e^{k_s t}, \quad (3.33)$$

где

$$\tilde{A}_i^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \alpha_{2i}^{(s)} \\ \vdots \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$\alpha_{ji}^{(s)}$ — постоянные.

Следует заметить, что и в тех случаях, когда система n уравнений (3.25) сводится к уравнению порядка ниже n (см. замечание 1 [§ 2 стр. 183]), характеристическое уравнение последнего необходимо имеет корни, совпадающие с корнями уравнения (3.27) (так как уравнение, к которому свелась система, должно иметь решения вида $e^{k_s t}$, где k_s — корни уравнения (3.27)). Но возможно, что кратности этих корней, если порядок полученного уравнения ниже n , будут ниже кратностей корней уравнения (3.27), и следовательно, возможно, что в решении (3.33) степень первого множителя будет ниже, чем $\gamma - 1$, т.е. если мы будем искать решение в виде (3.33), то может обнаружиться, что некоторые коэффициенты $\tilde{A}_i^{(s)}$, в том числе и при старшем члене, обращаются в нуль.

Итак, решение системы (3.25), соответствующее кратному корню характеристического уравнения, следует искать в виде (3.33). Подставив (3.33) в уравнение (3.25) и требуя, чтобы оно обратилось в тождество, определим матрицы $A_i^{(s)}$, причем некоторые из них, в том числе и $A_{\gamma-1}^{(s)}$, могут оказаться равными нулю.

З а м е ч а н и е. Можно точнее указать вид решения системы (3.25), соответствующего кратному корню характеристического уравнения (3.27). Преобразовав систему (3.25) неособенным линейным преобразованием к системе, в которой матрица $\|A - kE\|$ имеет нормальную Жорданову форму, и проинтегрировав полученную легко интегрирующуюся систему уравнений, обнаружим, что решение, соответствующее кратному корню k_s характеристического уравнения (3.27) кратности γ , имеет вид

$$X(t) = (\tilde{A}_0^{(s)} + \tilde{A}_1^{(s)}t + \dots + \tilde{A}_{\beta-1}^{(s)}t^{\beta-1})e^{k_s t},$$

где β — наибольшая степень элементарного делителя матрицы $\|A - kE\|$, соответствующего корню k_s .

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x + 3y.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k - 5 = 0$$

имеет корни $k_1 = 5$, $k_2 = -1$. Следовательно, решение ищем в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^{(1)} e^{5t}, & y_1 &= \alpha_2^{(1)} e^{5t}, \\ x_2 &= \alpha_1^{(2)} e^{-t}, & y_2 &= \alpha_2^{(2)} e^{-t}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в исходную систему, получим: $-4\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$, откуда $\alpha_2^{(1)} = 2\alpha_1^{(1)}$; $\alpha_1^{(1)}$ остается произвольным. Следовательно,

$$x_1 = c_1 e^{5t}, \quad y_1 = 2c_1 e^{5t}, \quad c_1 = \alpha_1^{(1)}.$$

Для определения коэффициентов $\alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_2^{(2)}$ получаем уравнение $2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0$, откуда $\alpha_2^{(2)} = -\alpha_1^{(2)}$; коэффициент $\alpha_1^{(2)}$ остается произвольным. Следовательно,

$$x_2 = c_2 e^{-t}, \quad y_2 = -c_2 e^{-t}, \quad c_2 = \alpha_1^{(2)}.$$

Общее решение

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}, \\ y &= 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + 9 = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \pm 3i$, $x_1 = \alpha_1 e^{3it}$, $y_1 = \alpha_2 e^{3it}$, $(1-3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяют, например, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1 - 3i$. Следовательно

$$\begin{aligned} x_1 &= 5e^{3it} = 5(\cos 3t + i \sin 3t), \\ y_1 &= (1 - 3i)e^{3it} = (1 - 3i)(\cos 3t + i \sin 3t). \end{aligned}$$

Действительная и мнимая части этого решения также являются решениями рассматриваемой системы, а их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами является общим решением:

$$\begin{aligned}x &= 5c_1 \cos 3t + 5c_2 \sin 3t, \\y &= c_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + c_2(\sin 3t - 3 \cos 3t).\end{aligned}$$

Пример 3.

$$\left. \begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y.\end{aligned}\right\} \quad (3.35)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k + 4 = 0$$

имеет кратный корень $k_{1,2} = 2$. Следовательно, решение следует искать в виде

$$\left. \begin{aligned}x &= (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t}, \\ y &= (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{2t}.\end{aligned}\right\} \quad (3.36)$$

Подставляя (3.36) в (3.35), получим

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 t \equiv \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t,$$

откуда

$$\begin{aligned}\beta_2 &= -\beta_1, \\ \alpha_2 &= -\alpha_1 - \beta_1.\end{aligned}$$

α_1 и β_1 остаются произвольными. Обозначая эти произвольные постоянные соответственно c_1 и c_2 , получим общее решение в виде

$$\begin{aligned}x &= (c_1 + c_2 t)e^{2t}, \\ y &= -(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{2t}.\end{aligned}$$

§ 6. Приближенные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений и уравнений n -го порядка

Все изложенные в § 7 [гл. 1 стр. 58] методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка без существенных изменений переносятся на системы уравнений первого порядка, а также на уравнения порядка выше первого, которые обычным способом сводятся к системе уравнений первого порядка (см. стр. 83).

1. Метод последовательных приближений. Как было указано на стр. 48, метод последовательных приближений применим к системам уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.37)$$

с начальными условиями $y_i(x_0) = y_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), если функции f_i непрерывны по всем аргументам и удовлетворяют условиям Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Нулевое приближение $y_{i0}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) может быть выбрано произвольно, лишь бы удовлетворялись начальные условия, а дальнейшие приближения вычисляются по формуле

$$y_{i,k+1}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(x, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Так же как и для одного уравнения первого порядка, этот метод редко применяется в практике приближенных вычислений ввиду сравнительно медленной сходимости приближений и сложности и неоднотипности вычислений.

2. Метод Эйлера. Интегральная кривая системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

определяемая начальными условиями $y_i(x_0) = y_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), заменяется ломаной, касающейся в одной из граничных точек каждого звена проходящей через ту же точку интегральной кривой (на рис. 3.2 изображена ломаная Эйлера и ее проекция только на плоскость xy_1). Отрезок $x_0 \leq x \leq b$, на котором надо вычислить решение, разбивается на части длиной h , и вычисление проводится по формулам

$$y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + hy'_i(x_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

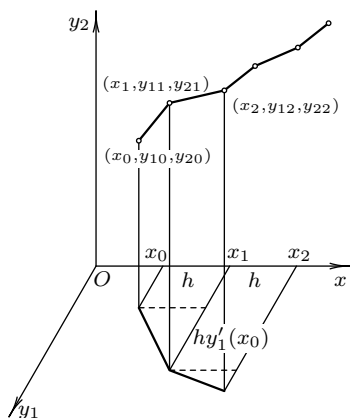


Рис. 3.2.

Сходимость ломаных Эйлера к интегральной кривой при $h \rightarrow 0$ доказывается так же, как для одного уравнения первого порядка (см. стр. 39). Для повышения точности можно применить итерации (уравнение).

3. Разложение по формуле Тейлора. Предполагая, что правые части системы уравнений (3.37) дифференцируемы k раз (для того чтобы обеспечить дифференцируемость решений $k+1$ раз), заменяют искомые решения несколькими первыми членами их тейловских разложений:

$$y_i(x) \approx y_i(x_0) + y_i'(x_0)(x - x_0) + y_i''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + y_i^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Оценка погрешности может быть осуществлена путем оценки остаточного члена в формуле Тейлора

$$R_{ik} = y_i^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

Этот метод дает хорошие результаты лишь в малой окрестности точки x_0 .

4. Метод Штермера. Отрезок $x_0 \leq x \leq b$ разбивается на части длины h , и вычисление решения системы (3.37) проводится по одной из формул:

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2} \Delta q_{i,k-1}, \quad (3.38)$$

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2} \Delta q_{i,k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i,k-2}, \quad (3.39)$$

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2} \Delta q_{i,k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i,k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{i,k-3}, \quad (3.40)$$

.

где

$$(i = 1, 2, \dots, n), \quad y_{ik} = y_i(x_k),$$

$$x_k = x_0 + kh, \quad q_{ik} = y_i(x_k)h,$$

$$\Delta q_{i,k-1} = q_{ik} - q_{i,k-1}, \quad \Delta^2 q_{i,k-2} = \Delta q_{i,k-1} - \Delta q_{i,k-2},$$

$$\Delta^3 q_{i,k-3} = \Delta^2 q_{i,k-2} - \Delta^2 q_{i,k-3}.$$

Формулы (3.38), (3.39) и (3.40) могут быть получены совершенно так же, как для одного уравнения первого порядка (см. стр. 60). Порядок погрешности при применении этих формул остается таким же, как и для одного уравнения.

Для начала вычисления по формуле Штермера необходимо знать несколько первых значений $y_i(x_k)$, которые могут быть найдены путем разложения по формуле Тейлора или методом Эйлера с уменьшенным шагом, причем, так же как и для одного уравнения, для повышения точности можно применять итерации (см. стр. 58), или методом Рунге.

5. Метод Рунге. Вычисляются числа

$$\begin{aligned} m_{i1} &= f_i(x_k, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}), \\ m_{i2} &= f_i\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{hm_{11}}{2}, y_{2k} + \frac{hm_{21}}{2}, \dots, y_{nk} + \frac{hm_{n1}}{2}\right), \\ m_{i3} &= f_i\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{hm_{12}}{2}, y_{2k} + \frac{hm_{22}}{2}, \dots, y_{nk} + \frac{hm_{n2}}{2}\right), \\ m_{i4} &= f_i(x_k + h, y_{1k} + hm_{13}, y_{2k} + hm_{23}, \dots, y_{nk} + hm_{n3}), \end{aligned}$$

зная которые, находим $y_{i,k+1}$ по формуле

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + \frac{h}{6}(m_{i1} + 2m_{i2} + 2m_{i3} + m_{i4}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Порядок погрешности такой же, как и для одного уравнения.

Грубо ориентировочно шаг h в зависимости от требуемой точности результата выбирается с учетом порядка погрешностей в применяемых формулах и уточняется путем пробных вычислений с шагом h и $\frac{1}{2}h$. Надежнее всего проводить вычисления с шагом h и $\frac{1}{2}h$ всех требуемых значений $y_i(x_k)$, и если при сравнении результатов все они в пределах заданной точности совпадают, то шаг h считают обеспечивающим заданную точность вычислений, в противном случае снова уменьшают шаг и проводят вычисления с шагом $\frac{1}{2}h$ и $\frac{1}{4}h$ и т.д. При правильном выборе шага h разности $\Delta_{q_{ik}}, \Delta^2_{q_{ik}}, \dots$ должны меняться плавно, а последние разности в формулах Штермера должны влиять лишь на запасные знаки.

Задачи к главе 3

1. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
2. $\frac{d^2x_1}{dt^2} = x_2, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1, \quad x_1(0) = 2, \quad \dot{x}_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 2, \quad \dot{x}_2(0) = 2.$
3. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \quad \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^{2t}.$

$$4. \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = x.$$

$$5. \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{x}.$$

$$6. \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y + 3, \quad \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y - 3.$$

$$7. \frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = -xy.$$

$$8. \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

$$9. \frac{dx}{dt} = -x + y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y - z.$$

$$10. t \frac{dx}{dt} + y = 0, \quad t \frac{dy}{dt} + x = 0.$$

$$11. \frac{dx}{dt} = y + 1, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\sin t}.$$

$$12. \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}.$$

$$13. \dot{x} + y = \cos t, \quad \dot{y} + x = \sin t.$$

$$14. \dot{x} + 3x - y = 0, \quad \dot{y} - 8x + y = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 4.$$

$$15. \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin \theta = 0, \quad \text{при } t = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{36}, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Определить $\theta(1)$ с точностью до 0,001.

$$16. \dot{x}(t) = ax - y, \quad \dot{y}(t) = x + ay; \quad a — \text{постоянная}.$$

$$17. \dot{x} + 3x + 4y = 0, \quad \dot{y} + 2x + 5y = 0.$$

$$18. \dot{x} = -5x - 2y, \quad \dot{y} = x - 7y.$$

$$19. \dot{x} = y - z, \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = x + z.$$

$$20. \dot{x} - y + z = 0, \quad \dot{y} - x - y = t, \quad \dot{z} - x - z = t.$$

$$21. \frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

$$22. \frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}.$$

$$23. \dot{X} = AX, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{а } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Г Л А В А 4

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1. Основные понятия

Для возможности математического описания какого-нибудь реального явления неизбежно приходится упрощать, идеализировать это явление, выделяя и учитывая лишь наиболее существенные из влияющих на него факторов и отбрасывая остальные, менее существенные. При этом неизбежно встает вопрос о том, удачно ли выбраны упрощающие предположения. Возможно, что неучтенные факторы сильно влияют на изучаемое явление, значительно меняя его количественные или даже качественные характеристики. В конечном счете этот вопрос решается практикой — соответствием полученных выводов с опытными данными, но все же во многих случаях можно указать условия, при которых некоторые упрощения заведомо невозможны.

Если некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

с начальными условиями $y_i(t_0) = y_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), которые обычно являются результатами измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение, определяемое выбранными нами неточными начальными данными, обычно не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление.

Следовательно, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых достаточно малое изменение начальных значений вызывает сколь угодно малое изменение решения.

Если t изменяется на конечном отрезке $t_0 \leq t \leq T$, то ответ на этот вопрос дает теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений (см. стр. 51). Если же t может принимать сколь угодно большие значения, то этим вопросом занимается теория устойчивости.

Решение $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.1) называется устойчивым, или, точнее, *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) той же системы, начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

для всех $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2)$$

т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \geq t_0$.

Замечание. Если система (4.1) удовлетворяет условиям теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных значений, то в определении устойчивости вместо $t \geq t_0$ можно писать $t \geq T \geq t_0$, так как в силу этой теоремы на отрезке $t_0 \leq t \leq T$ решения остаются близкими при достаточно близких начальных значениях.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) неравенства (4.2) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ называется *неустойчивым*. Неустойчивые решения лишь в редких случаях представляют интерес в практических задачах.

Если решение $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) не только устойчиво, но, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad (4.3)$$

если $|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, то решение $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) называется *асимптотически устойчивым*.

Заметим, что из одного условия (4.3) еще не следует устойчивость решения $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Пример 1. Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения $dy/dt = -a^2y$, $a \neq 0$, определяемое начальным условием $y(t_0) = y_0$.
Решение

$$y = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

асимптотически устойчиво, так как

$$|y_0 e^{-a^2(t-t_0)} - \bar{y}_0 e^{-a^2(t-t_0)}| = e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon$$

при $t \geq t_0$, если $|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon e^{-a^2 t_0}$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| = 0.$$

Пример 2. Исследовать на устойчивость решение уравнения $dy/dt = a^2 y$, $a \neq 0$, определяемое условием $y(t_0) = y_0$.

Решение $y = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$ неустойчиво, так как нельзя подобрать столь малое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|\bar{y}_0 - y_0| < \delta(\varepsilon)$ следовало бы

$$|\bar{y}_0 e^{a^2(t-t_0)} - y_0 e^{a^2(t-t_0)}| < \varepsilon$$

или

$$e^{a^2(t-t_0)} |\bar{y}_0 - y_0| < \varepsilon$$

при всех $t \geq t_0$.

Исследование на устойчивость некоторого решения

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения — *точки покоя*, расположенной в начале координат.

Действительно, преобразуем систему уравнений (4.1) к новым переменным, полагая

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Новыми неизвестными функциями x_i являются отклонения $y_i - \bar{y}_i(t)$ прежних неизвестных функций от функций $\bar{y}_i(t)$, определяющих исследуемое на устойчивость решение.

В силу (4.4) в новых переменных система (4.1) принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_2(t), \dots, x_n + \bar{y}_n(t)) \quad (4.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Очевидно, что исследуемому на устойчивость решению $y_i = \bar{y}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.1), в силу зависимости $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$, соответствует тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.5), причем исследование на устойчивость решения $y_i = \bar{y}_i(t)$

($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.1) может быть заменено исследованием на устойчивость тривиального решения системы (4.5). Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что на устойчивость исследуется тривиальное решение или, что одно и то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений.

Сформулируем условия устойчивости в применении к точке покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.5) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

следует

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{при} \quad t \geq T \geq t_0.$$

Или несколько иначе: точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\varepsilon)$$

следует

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2$$

при $t \geq T$, т.е. траектория, начальная точка которой находится в δ_1 -окрестности начала координат, при $t \geq T$ не выходит за пределы ε -окрестности начала координат.

§ 2. Простейшие типы точек покоя

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0$, $y = 0$ системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ищем решение в виде $x = \alpha_1 e^{kt}$, $y = \alpha_2 e^{kt}$ (см. стр. 200). Для определения k получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0,$$

α_1 и α_2 с точностью до постоянного множителя определяются из одного из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) *Корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительны и различны.*

Общее решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 \alpha_1 e^{k_1 t} + c_2 \beta_1 e^{k_2 t}, \\ y &= c_1 \alpha_2 e^{k_1 t} + c_2 \beta_2 e^{k_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

где α_i и β_i — постоянные, определяемые из уравнений (4.7) соответственно при $k = k_1$ и при $k = k_2$, а c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

При этом возможны следующие случаи:

1) Если $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$, то точка покоя $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчива, так как из-за наличия множителей $e^{k_1 t}$ и $e^{k_2 t}$ в (4.8) все точки, находящиеся в начальный момент $t = t_0$ в любой δ -окрестности начала координат, при достаточно большом t переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой ε -окрестности начала координат, а при $t \rightarrow \infty$ стремятся к началу координат. На рис. 4.1 изображено рас-

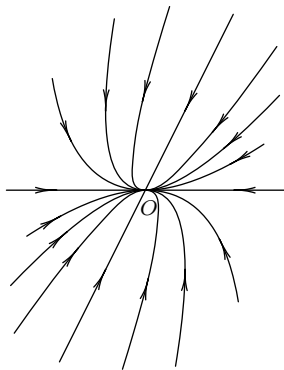


Рис. 4.1.

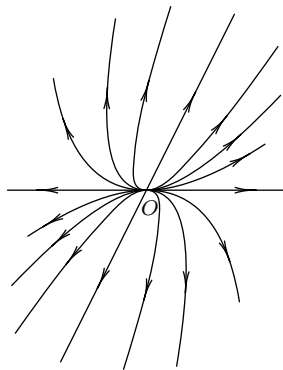


Рис. 4.2.

положение траекторий около точки покоя рассматриваемого типа, называемой *устойчивым узлом*, причем стрелками указано направление движения по траекториям при возрастании t .

2) Пусть $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Этот случай переходит в предыдущий при замене t на $-t$. Следовательно, траектории имеют такой же вид, как и в предыдущем случае, но только точка по траекториям движется в противоположном направлении (рис. 4.2). Очевидно, что с возрастанием t точки, сколь угодно близкие к началу координат, удаляются из ε -окрестности начала координат — точка покоя неустойчива в смысле Ляпунова. Точка покоя рассматриваемого типа называется *неустойчивым узлом*.

3) Если $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, то точка покоя тоже неустойчива, так как движущаяся по траектории

$$x = c_1 \alpha_1 e^{k_1 t}, \quad y = c_1 \alpha_2 e^{k_1 t} \quad (4.9)$$

точка при сколь угодно малых значениях c_1 с возрастанием t выходит из ε -окрестности начала координат.

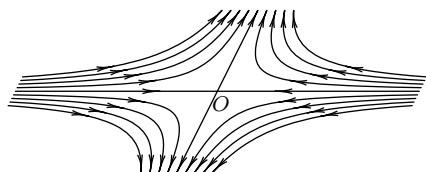


Рис. 4.3.

Заметим, что в рассматриваемом случае существуют движения, приближающиеся к началу координат, а именно:

$$x = c_2 \beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = c_2 \beta_2 e^{k_2 t}.$$

При различных значениях c_2 получаем различные движения по одной и той же прямой $y = (\beta_2/\beta_1)x$. При возрастании t точки на этой прямой движутся по направлению к началу координат (рис. 4.3). Заметим также, что точки траектории (4.9) движутся с возрастанием t по прямой $y = (\alpha_2/\alpha_1)x$, удаляясь от начала координат. Если же $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$ траектория покидает окрестность точки покоя.

Точка покоя рассматриваемого типа называется *седлом* (рис. 4.3) потому, что расположение траекторий в окрестности такой точки напоминает расположение линий уровня в окрестности седлообразной точки некоторой поверхности

$$z = f(x, y).$$

б) Корни характеристического уравнения комплексны:

$$k_{1,2} = p \pm qi, \quad q \neq 0.$$

Общее решение рассматриваемой системы можно представить в виде (см. стр. 203)

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{pt}(c_1 \cos qt + c_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt}(c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt), \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а c_1^* и c_2^* — некоторые линейные комбинации этих постоянных.

При этом возможны следующие случаи:

1) $k_{1,2} = p \pm qi$, $p < 0$, $q \neq 0$.

Множитель e^{pt} , $p < 0$, стремится к нулю с возрастанием t , а второй — периодический множитель в уравнениях (4.10) остается ограниченным.

Если бы $p = 0$, то траекториями были бы, в силу периодичности вторых множителей в правой части уравнений (4.10), замкнутые кривые, окружающие точку покоя $x = 0$, $y = 0$ (рис. 4.4). Наличие стремящегося к нулю с возрастанием t множителя e^{pt} , $p < 0$, превращает

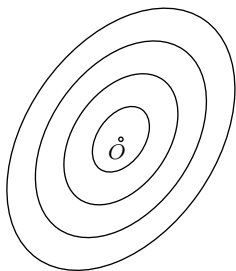


Рис. 4.4.

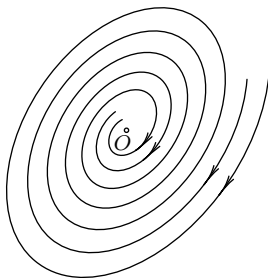


Рис. 4.5.

замкнутые кривые в спирали, асимптотически приближающиеся при $t \rightarrow \infty$ к началу координат (рис. 4.5), причем при достаточно большом t точки, находившиеся при $t = t_0$ в любой δ -окрестности начала координат, попадают в заданную ε -окрестность точки покоя $x = 0$, $y = 0$, а при дальнейшем возрастании t стремятся к точке покоя. Следовательно, точка покоя асимптотически устойчива — она называется *устойчивым фокусом*. Фокус отличается от узла тем, что касательная к траекториям не стремится к определенному пределу при приближении точки касания к точке покоя.

2) $k_{1,2} = p \pm qi$, $p > 0$, $q \neq 0$.

Этот случай переходит в предыдущий при замене t на $-t$. Следовательно, траектории не отличаются от траекторий предыдущего

случая, но движение по ним происходит при возрастании t в противоположном направлении (рис. 4.6). Из-за наличия возрастающего множителя e^{pt} точки, находившиеся в начальный момент сколь угодно близко к началу координат, с возрастанием t удаляются из ε -окрестности начала координат — точка покоя неустойчива. Она носит название *неустойчивого фокуса*.

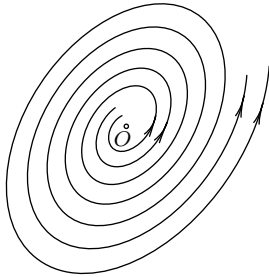


Рис. 4.6.

3) $k_{1,2} = \pm qi$, $q \neq 0$.

Как уже отмечалось выше, в силу периодичности решений траекториями являются замкнутые кривые, содержащие внутри себя точку покоя (рис. 4.4), называемую в этом случае *центром*. Центр является устойчивой точкой покоя, так как для заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что замкнутые траектории, начальные точки которых лежат в δ -окрестности начала координат, не выходят за пределы ε -окрестности начала координат или, что то же самое, можно подобрать столь малые c_1 и c_2 , что решения

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 \cos qt + c_2 \sin qt, \\ y &= c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

будут удовлетворять неравенству

$$x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2.$$

Заметим, однако, что асимптотической устойчивости в рассматриваемом случае нет, так как $x(t)$ и $y(t)$ в (4.11) не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

в) *Корни кратны* $k_1 = k_2$.

1) $k_1 = k_2 < 0$.

Общее решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= (c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 t) e^{k_1 t}, \\ y(t) &= (c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 t) e^{k_1 t}, \end{aligned} \right\}$$

причем не исключена возможность того, что $\beta_1 = \beta_2 = 0$, но тогда α_1 и α_2 будут произвольными постоянными.

Из-за наличия быстро стремящегося к нулю множителя $e^{k_1 t}$ при $t \rightarrow \infty$ произведение $(c_1 \alpha_i + c_2 \beta_i t) e^{k_1 t}$ ($i = 1, 2$) стремится к нулю

при $t \rightarrow \infty$, причем при достаточно большом t все точки любой δ -окрестности начала координат попадают в заданную ε -окрестность начала координат и, следовательно, точка покоя асимптотически устойчива. На рис. 4.7 изображена точка покоя рассматриваемого вида, так же как и в случае а) 1) называемая *устойчивым узлом*. Этот узел занимает промежуточное положение между узлом а) 1) и фокусом б) 1), так как при сколь угодно малом изменении действительных коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} он может превратиться как в устойчивый фокус,

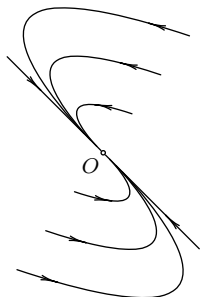


Рис. 4.7.

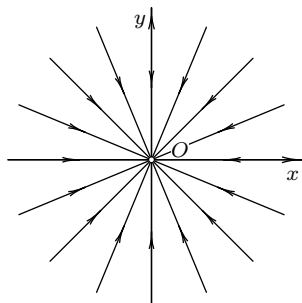


Рис. 4.8.

так и в устойчивый узел типа а) 1), потому что при сколь угодно малом изменении коэффициентов кратный корень может перейти как в пару комплексных сопряженных корней, так и в пару действительных различных корней. Если $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то тоже получаем устойчивый узел (так называемый *дикритический узел*), изображенный на рис. 4.8.

2) Если $k_1 = k_2 > 0$, то замена t на $-t$ приводит к предыдущему случаю. Следовательно, траектории не отличаются от траекторий предыдущего случая, изображенных на рис. 4.7 и 4.8, но движение по ним происходит в противоположном направлении. В этом случае точка покоя называется, так же как и в случае а) 2), *неустойчивым узлом*.

Тем самым исчерпаны все возможности, так как случай $k_1 = 0$ (или $k_2 = 0$) исключен условием

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Замечание 1. Если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

то характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

имеет нулевой корень $k_1 = 0$. Предположим, что $k_1 = 0$, но $k_2 \neq 0$. Тогда общее решение системы (4.6) [стр. 214] имеет вид

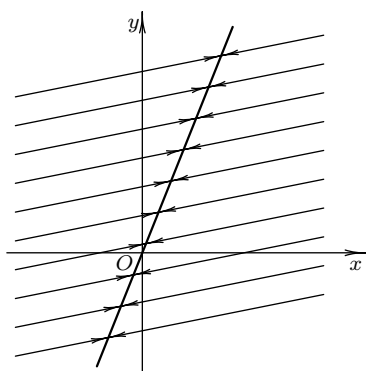


Рис. 4.9.

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 e^{k_2 t}, \\ y &= c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 e^{k_2 t}. \end{aligned} \right\}$$

Исключая t , получим семейство параллельных прямых $\beta_1(y - c_1\alpha_2) = \beta_2(x - c_1\alpha_1)$. При $c_2 = 0$ получаем однопараметрическое семейство точек покоя, расположенных на прямой $\alpha_1 y = \alpha_2 x$. Если $k_2 < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ на каждой траектории точки приближаются к лежащей на этой траектории точке покоя $x = c_1\alpha_1$, $y = c_1\alpha_2$ (рис. 4.9). Точка покоя

$x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчива, но асимптотической устойчивости нет.

Если же $k_2 > 0$, то траектории расположены так же, но движение точек на траекториях происходит в противоположном направлении — точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчива.

Если же $k_1 = k_2 = 0$, то возможны два случая:

1. Общее решение системы (4.6) имеет вид $x = c_1$, $y = c_2$ — все точки являются точками покоя, все решения устойчивы.

2. Общее решение имеет вид

$$x = c_1 + c_2^* t, \quad y = c_1^* + c_2^* t,$$

где c_1^* и c_2^* — линейные комбинации произвольных постоянных c_1 и c_2 . Точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчива.

Замечание 2. Классификация точек покоя тесно связана с классификацией особых точек (см. стр. 54–57).

Действительно, в рассматриваемом случае система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

путем исключения t могла бы быть сведена к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \quad (4.12)$$

интегральные кривые которого совпадают с траекториями движения системы (4.6). При этом точка покоя $x = 0$, $y = 0$ системы (4.6) является особой точкой уравнения (4.12).

Заметим, что если оба корня характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть [случаи а) 1); б) 1); в) 1)], то точка покоя асимптотически устойчива. Если же хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть [случаи а) 2); а) 3); б) 2); в) 2)], то точка покоя неустойчива.

Аналогичные утверждения справедливы и для системы n линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.13)$$

Если действительные части всех корней характеристического уравнения системы (4.13) отрицательны, то тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) асимптотически устойчиво.

Действительно, частные решения, соответствующие некоторому корню k_s характеристического уравнения, имеют вид (стр. 200 и 203)

$$x_i = \alpha_i e^{k_s t} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

если k_s действительны,

$$x_j = e^{p_s t} (\beta_j \cos q_s t + \gamma_j \sin q_s t),$$

если $k_s = p_s + q_s i$, и, наконец, в случае кратных корней решения такого же вида, но еще умноженные на некоторые многочлены $P_j(t)$. Очевидно, что все решения такого вида, если действительные части корней отрицательны ($p_s < 0$, или если k_s действительно, то $k_s < 0$), стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ не медленнее, чем ce^{-mt} , где c — постоянный множитель, а $-m < 0$ и больше наибольшей действительной части корней характеристического уравнения. Следовательно, при достаточно большом t точки траекторий, начальные значения которых находятся

в любой δ -окрестности начала координат, попадают в сколь угодно малую ε -окрестность начала координат и при $t \rightarrow \infty$ неограниченно приближаются к началу координат — точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) асимптотически устойчива.

Если же действительная часть хотя бы одного корня характеристического уравнения положительна, $\operatorname{Re} k_i = p_i > 0$, то соответствующее этому корню решение вида $x_j = c\alpha_j e^{k_i t}$, или в случае комплексного k_i его действительная (или мнимая) часть $ce^{p_i t}(\beta_j \cos q_i t + \gamma_j \sin q_i t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) при сколь угодно малых по модулю значениях c неограниченно возрастает по модулю при возрастании t , и, следовательно, точки, расположенные в начальный момент на этих траекториях в сколь угодно малой δ -окрестности начала координат, покидают при возрастании t любую заданную ε -окрестность начала координат. Следовательно, если действительная часть хотя бы одного корня характеристического уравнения положительна, то точка покоя $x_j \equiv 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) системы (4.13) неустойчива.

Пример 1. Какого типа точку покоя имеет система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + 3y? \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - k & -1 \\ 2 & 3 - k \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = 2 \pm i$, следовательно, точка покоя $x = 0$, $y = 0$ является неустойчивым фокусом.

Пример 2. $\ddot{x} = -a^2 x - 2b\dot{x}$ — уравнение упругих колебаний с учетом трения или сопротивления среды (при $b > 0$). Переходя к эквивалентной системе уравнений, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -a^2 x - 2by. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -a^2 & -2b - k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + 2bk + a^2 = 0,$$

откуда $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $b = 0$, т. е. сопротивления среды не учитываются. Все движения периодические. Точка покоя в начале координат является центром.

2) $b^2 - a^2 < 0$, $b > 0$. Точка покоя является устойчивым фокусом. Колебания затухают.

3) $b^2 - a^2 \geq 0$, $b > 0$. Точка покоя является устойчивым узлом. Все решения затухающие, неколеблущиеся. Этот случай наступает, если сопротивление среды велико ($b \geq a$).

4) $b < 0$ (случай отрицательного трения), $b^2 - a^2 < 0$. Точка покоя является неустойчивым фокусом.

5) $b < 0$, $b^2 - a^2 \geq 0$ (случай большого отрицательного трения). Точка покоя является неустойчивым узлом.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 2z, \\ \frac{dz}{dt} &= 5x - 4y. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 2 & -1 \\ 3 & -k & -2 \\ 5 & -4 & -k \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^3 - 9k + 8 = 0.$$

Определить корни кубического уравнения в общем случае довольно трудно, однако в данном случае один корень $k_1 = 1$ легко подбирается, и так как этот корень имеет положительную действительную часть, то можно утверждать, что точка покоя $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ неустойчива.

§ 3. Второй метод А. М. Ляпунова

Выдающийся русский математик Александр Михайлович Ляпунов в конце XIX века разработал весьма общий метод исследования на устойчивость решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.14)$$

получивший название *второго метода Ляпунова*.

Теорема 4.1 (теорема Ляпунова об устойчивости). Если существует дифференцируемая функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемая функцией Ляпунова, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:

1) $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, причем $v = 0$ лишь при $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. функция v имеет строгий минимум в начале координат;

2) $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0$ при $t \geq t_0$, то точка покоя

$x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) устойчива.

Производная dv/dt в условии 2) взята вдоль интегральной кривой, т. е. она вычислена в предположении, что аргументы x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

функции $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ заменены решением $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы дифференциальных уравнений (4.14).

Действительно, в этом предположении

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

или заменяя dx_i/dt правыми частями системы (4.14), окончательно получим

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Доказательство теоремы Ляпунова об устойчивости.

В окрестности начала координат, как и в окрестности всякой точки строгого минимума (рис. 4.10), поверхности уровня $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ функции $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются замкнутыми поверхностями, внутри которых находится точка минимума — начало координат. Зададим $\varepsilon > 0$. При достаточно малом $c > 0$ поверхность уровня $v = c$ целиком лежит в ε -окрестности начала координат¹⁾, но не проходит через начало координат, следовательно, можно выбрать $\delta > 0$ такое, что δ -окрестность начала координат целиком лежит внутри поверхности $v = c$, причем в этой окрестности $v < c$. Если начальная точка с координатами $x_i(t_0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) выбрана в δ -окрестности начала координат (рис. 4.11) и, следовательно,

¹⁾ Точнее, по крайней мере одна замкнутая компонента поверхности уровня $v = c$ лежит в ε -окрестности начала координат.

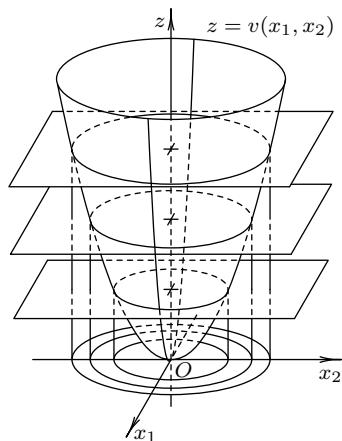


Рис. 4.10.

$v(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = c_1 < c$, то при $t > t_0$ точка траектории, определяемой этими начальными условиями, не может выйти за пределы ε -окрестности начала координат и даже за пределы поверхности уровня $v = c$, так как, в силу условия 2) теоремы, функция v вдоль траектории не возрастает, и, следовательно, при $t \geq t_0$

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \leq c_1 < c.$$

Замечание. А. М. Ляпунов доказал теорему об устойчивости в более общих предположениях, в частности, он считал, что функция v

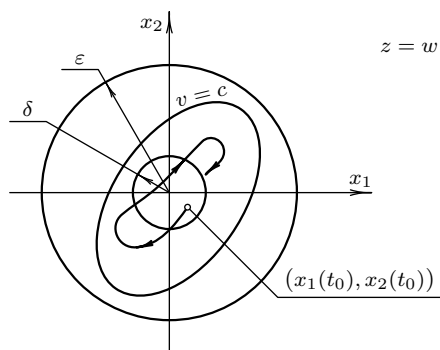


Рис. 4.11.

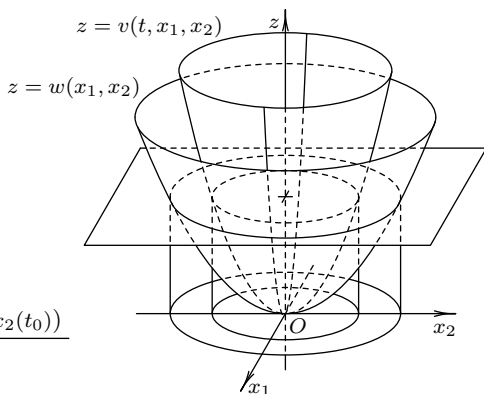


Рис. 4.12.

может зависеть и от t : $v = v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$. При этом для справедливости теоремы об устойчивости первое условие надо заменить следующим

$$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq w(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

в окрестности начала координат при $t \geq t_0$, где непрерывная функция w имеет строгий минимум в начале координат, $v(t, 0, 0, \dots, 0) = w(0, 0, \dots, 0) = 0$, а второе условие остается прежним $dv/dt \leq 0$, но только в этом случае

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Схема доказательства остается прежней, надо только принять во внимание, что, в силу условия 1), подвижная при изменяющемся t поверхность уровня $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ остается при всех изменениях $t \geq t_0$ внутри поверхности уровня $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ (рис. 4.12).

Теорема 4.2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). Если существует дифференцируемая функция Ляпунова $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая условиям:

1) $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет строгий минимум в начале координат: $v(0, 0, \dots, 0) = 0$;

2) производная функции v , вычисленная вдоль интегральных кривых системы (4.14)

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0,$$

причем вне сколь угодно малой окрестности начала координат, т. е. при $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \delta_1^2 > 0$, $t \geq T_0 \geq t_0$, производная $dv/dt \leq -\beta < 0$, где β — постоянная, то точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.14) асимптотически устойчива.

Доказательство. Так как условия теоремы об устойчивости выполнены, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что траектория, начальная точка которой находится в δ -окрестности начала координат, при $t \geq t_0$ не выходит за пределы ε -окрестности начала координат. Следовательно, в частности, вдоль такой траектории при $t > T_0$ выполнено условие 2), поэтому вдоль траектории функция v монотонно убывает с возрастанием t , и вдоль траектории существует предел функции v при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \alpha \geq 0.$$

Надо доказать, что $\alpha = 0$, так как если $\alpha = 0$, то из условия 1) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. точка покоя $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) асимптотически устойчива. Допустим, что $\alpha > 0$; тогда траектория при $t > t_0$ находится в области $v \geq \alpha$, следовательно, вне некоторой δ_1 -окрестности начала координат, т. е. там, где по условию 2) $dv/dt \leq -\beta < 0$ при $t \geq T_0$. Умножая неравенство $dv/dt \leq -\beta$ на dt и интегрируя вдоль траектории в пределах от T_0 до t , получим:

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) - v(x_1(T_0), x_2(T_0), \dots, x_n(T_0)) \leq -\beta(t - T_0),$$

или

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \leq v(x_1(T_0), x_2(T_0), \dots, x_n(T_0)) - \beta(t - T_0).$$

При достаточно большом t правая часть отрицательна, а следовательно, и $v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) < 0$, что противоречит условию 1).

Замечание. Теорема об асимптотической устойчивости обобщается на случай функции v , зависящей от t, x_1, x_2, \dots, x_n , если первое условие, как и в предыдущей теореме, заменить следующим:

$$\begin{aligned} v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq w(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

где функция w имеет строгий минимум в начале координат, и, кроме того, потребовать, чтобы функция $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ равномерно относительно t стремилась к нулю при $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow 0$.

Теорема 4.3 (теорема Четаева о неустойчивости). Если существует дифференцируемая функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая в некоторой замкнутой h -окрестности начала координат условиям:

- 1) в сколь угодно малой окрестности U начала координат существует область $(v > 0)$, в которой $v > 0$, причем $v = 0$ на лежащей в U части границы области $(v > 0)$;
- 2) в области $(v > 0)$ производная

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

причем в области $(v \geq \alpha)$, $\alpha > 0$, производная $dv/dt \geq \beta > 0$, то точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.14) неустойчива.

Доказательство. Начальную точку $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ возьмем в сколь угодно малой окрестности начала координат в области $(v > 0)$, $v(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = \alpha > 0$ (рис. 4.13). Так как вдоль траектории $dv/dt \geq 0$, то функция v вдоль траектории не убывает, и следовательно, пока траектория не покинет рассматриваемую h -окрестность начала координат, где выполнены условия теоремы, траектория должна находиться в области $(v \geq \alpha)$. Допустим, что траектория не покидает h -окрестности начала координат. Тогда в силу условия 2) вдоль траектории при $t \geq t_0$ производная $dv/dt \geq \beta > 0$. Умножая это неравенство на dt и интегрируя, получим:

$$v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) - v(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) \geq \beta(t - t_0),$$

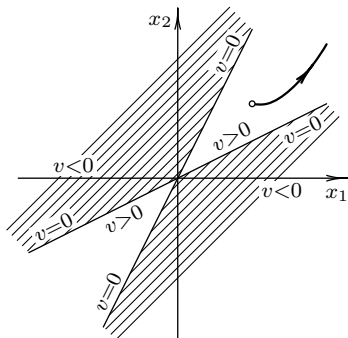


Рис. 4.13.

откуда следует, что при $t \rightarrow \infty$ функция v вдоль траектории неограниченно возрастает, что находится в противоречии с предположением о том, что траектория не выходит за пределы замкнутой h -окрестности начала координат, так как в этой h -окрестности непрерывная функция v ограничена.

Замечание. Н. Г. Четаев доказал теорему о неустойчивости в предположении, что v может зависеть также и от t , при этом условия теоремы несколько изменяются и, в частности, приходится требовать ограниченности функции v в области ($v \geq 0$) в рассматриваемой h -окрестности начала координат.

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

Функция $v(x, y) = x^2 + y^2$ удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

- 1) $v(x, y) \geq 0, \quad v(0, 0) = 0;$
- 2) $\frac{dv}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0.$ Вне окрестности начала координат $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0.$

Следовательно, решение $x \equiv 0, \quad y \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x \equiv 0, \quad y \equiv 0$ системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -xy^4, \\ \frac{dy}{dt} &= yx^4. \end{aligned}$$

Функция $v(x, y) = x^4 + y^4$ удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости:

- 1) $v(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0, \quad v(0, 0) = 0;$
- 2) $\frac{dv}{dt} = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 \equiv 0.$

Следовательно, тривиальное решение $x \equiv 0, \quad y \equiv 0$ устойчиво.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0, \quad y \equiv 0$ системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^3 + x^5, \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 + y^5. \end{aligned}$$

Функция $v = x^4 - y^4$ удовлетворяет условиям теоремы Н. Г. Четаева:

- 1) $v > 0$, при $|x| > |y|$;
- 2) $\frac{dv}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8) > 0$ при $|x| > |y|$, причем при $v \geq \alpha > 0$, $\frac{dv}{dt} \geq \beta > 0$.

Следовательно, точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчива.

Пример 4. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

если дано, что функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет строгий максимум в начале координат.

В качестве функции Ляпунова возьмем разность

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(0, 0, \dots, 0) - u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которая, очевидно, обращается в нуль при $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), имеет строгий минимум в начале координат и, следовательно, удовлетворяет условию 1) теоремы Ляпунова об устойчивости. Производная вдоль интегральных кривых

$$\frac{dv}{dt} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \leq 0.$$

Итак, условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены, следовательно, тривиальное решение устойчиво.

Пример 5. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad \text{где } a_{ij}(t) = -a_{ji}(t) \text{ при } i \neq j \text{ и все } a_{ii}(t) \leq 0.$$

Тривиальное решение устойчиво, так как функция $v = \sum_{i=1}^n x_i^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

- 1) $v \geq 0$ и $v(0, 0, \dots, 0) = 0$;
- 2) $\frac{dv}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n x_i \frac{dx_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_i x_j = 2 \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)x_i^2 \leq 0$.

§ 4. Исследование на устойчивость по первому приближению

При исследовании на устойчивость точки покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.14)$$

где f_i — дифференцируемые в окрестности начала координат функции, часто применяется следующий метод: пользуясь дифференцируемостью функций $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, представляют систему (4.14) в окрестности начала координат $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.15)$$

где R_i имеют порядок выше первого относительно $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, и вместо точки покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.15) исследуют на устойчивость ту же точку покоя линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.16)$$

называемой *системой уравнений первого приближения* для системы (4.15). Условия применимости этого метода, которым долгое время пользовались без всякого обоснования, были детально исследованы А. М. Ляпуновым и в дальнейшем расширены трудами многих других математиков, среди которых следует в первую очередь отметить работы О. Перрона, И. Г. Малкина, К. П. Персидского, Н. Г. Четаева.

Исследование на устойчивость системы уравнений первого приближения, конечно, является задачей значительно более легкой, чем исследование исходной, вообще говоря, нелинейной системы, однако даже исследование линейной системы (4.16) при переменных коэффициентах $a_{ij}(t)$ является задачей весьма сложной. Если же все a_{ij} постоянны, т.е. система стационарна в первом приближении, то исследование на устойчивость линейной системы (4.16) не представляет принципиальных затруднений (см. стр. 221–222).

Теорема 4.4. Если система уравнений (4.15) стационарна в первом приближении, все члены R_i в достаточно малой окрестности начала координат при $t \geq T \geq t_0$ удовлетворяют неравенствам $|R_i| \leq N(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, где N и α — постоянные, причем $\alpha > 0$ (т.е.,

если R_i не зависят от t , то их порядок выше первого относительно $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ и все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (4.17)$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальные решения $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы уравнений (4.15) и системы уравнений (4.16) асимптотически устойчивы, следовательно, в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Теорема 4.5. Если система уравнений (4.15) стационарна в первом приближении, все функции R_i удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, и хотя бы один корень характеристического уравнения (4.17) имеет положительную действительную часть, то точки покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (4.15) и системы (4.16) неустойчивы, следовательно, и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Теоремы 4.4 и 4.5 в отношении ограничений, налагаемых на корни характеристического уравнения, не охватывают лишь так называемый критический случай: все действительные части корней характеристического уравнения неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю.

В критическом случае на устойчивость тривиального решения системы (4.15) начинают влиять нелинейные члены R_i и исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно.

Доказательство теорем 4.4 и 4.5 можно найти в книге И. Г. Малкина [2].

Для того чтобы дать представление о методах доказательства таких теорем, мы приведем доказательство теоремы 4.4 в предположении, что все корни характеристического уравнения k_i действительны и различны

$$k_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad k_i \neq k_j \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В векторных обозначениях система (4.15) и система (4.16) примут соответственно вид

$$\frac{dX}{dt} = AX + R, \quad (4.15_1)$$

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (4.16_1)$$

где

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}, \quad R = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}.$$

С помощью невырожденного линейного преобразования с постоянными коэффициентами $X = BY$, где

$$B = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Bmatrix}, \quad Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix},$$

преобразуем систему (4.16₁) к виду $B \cdot dY/dt = ABY$ или $dY/dt = B^{-1}ABY$. Подберем матрицу B так, чтобы матрица $B^{-1}AB$ была диагональной:

$$B^{-1}AB = \begin{Bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{Bmatrix}.$$

При этом система (4.16) преобразуется в

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а система (4.15) при том же преобразовании переходит в

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i + \bar{R}_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.18)$$

где $|\bar{R}_i| \leq \bar{N}(\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, \bar{N} — постоянная величина, $\alpha > 0$, $t \geq T$.

Для системы (4.18) функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы об асимптотической устойчивости, является

$$v = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Действительно,

- 1) $v(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq 0$, $v(0, 0, \dots, 0) = 0$;
- 2) $\frac{dv}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n y_i \frac{dy_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n k_i y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n k_i y_i R_i \leq \sum_{i=1}^n k_i y_i^2 \leq 0$

при достаточно малых y_i , так как все $k_i < 0$, а удвоенная сумма

$$2 \sum_{i=1}^n k_i y_i R_i$$

при достаточно малых y_i может быть сделана по модулю меньше суммы $\sum_{i=1}^n k_i y_i^2$.

Наконец, вне окрестности начала координат

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0.$$

Пример 1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Нелинейные члены удовлетворяют условиям теорем 4.4 и 4.5. Исследуем на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm i$, следовательно, в силу теоремы 4.5 точка покоя систем (4.19) и (4.20) неустойчива.

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 8 \sin y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Разлагая $\sin y$, e^x и $\cos y$ по формуле Тейлора, представляем систему в виде

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y + R_1, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y + R_2,$$

где R_1 и R_2 удовлетворяют условиям теорем 4.4 и 4.5.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 2-k & 8 \\ -1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$ для системы первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y \quad (4.22)$$

имеет корни с отрицательными действительными частями. Следовательно, точка покоя $x = 0$, $y = 0$ систем (4.21) и (4.22) асимптотически устойчива.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y^3. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -k & -4 \\ 3 & -k \end{vmatrix} = 0$ для системы первого приближения имеет чисто мнимые корни — критический случай. Исследование по первому приближению невозможно. В данном случае легко подбирается функция Ляпунова

$$v = 3x^2 + 4y^2.$$

$$1) \quad v(x, y) \geq 0, \quad v(0, 0) = 0;$$

2) $\frac{dv}{dt} = 6x(-4y - x^3) + 8y(3x - y^3) = -(6x^4 + 8y^4) \leq 0$, причем вне некоторой окрестности начала координат $dv/dt \leq -\beta < 0$, следовательно, точка покоя $x = 0$, $y = 0$ по теореме предыдущего параграфа асимптотически устойчива.

Остановимся несколько подробнее на последнем примере. Система уравнений первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = -4y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x \quad (4.24)$$

имела в начале координат центр. Наличие нелинейных членов в системе (4.23) превратило этот центр в устойчивый фокус.

Аналогичная, но несколько более сложная геометрическая картина наблюдается и в общем случае. Пусть система первого приближения для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + R_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + R_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

имеет точку покоя типа центра в начале координат. Предположим, как и на стр. 230, что нелинейные члены $R_1(x_1, x_2)$ и $R_2(x_1, x_2)$ имеют порядок выше первого относительно $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Эти нелинейные члены в достаточно малой окрестности начала координат малы по сравнению с линейными членами, но все же они несколько искажают поле направлений, определяемое линейной системой первого приближения, поэтому выходящая из некоторой точки (x_0, y_0) траектория после обхода начала координат немного смещается по сравнению с проходящей

через ту же точку траекторией линейной системы и, вообще говоря, не попадает в точку (x_0, y_0) — траектория не замыкается.

Если после такого обхода начала координат все траектории приближаются к началу координат, то в начале координат возникает устойчивый фокус; если же траектории удаляются от начала координат, возникает неустойчивый фокус.

В виде исключения возможен также случай, при котором все траектории нелинейной системы, расположенные в окрестности начала координат, остаются замкнутыми, однако наиболее типичным надо считать случай, при котором лишь некоторые (может быть, и ни одной) замкнутые кривые остаются замкнутыми, а остальные превращаются в спирали.

Такие замкнутые траектории, в окрестности которых все траектории являются спиралями, называются *предельными циклами*.

Если близкие к предельному циклу траектории являются спиралями, приближающимися при $t \rightarrow \infty$ к предельному циклу, то предельный цикл называется *устойчивым* (рис. 4.14); если близкие к предель-

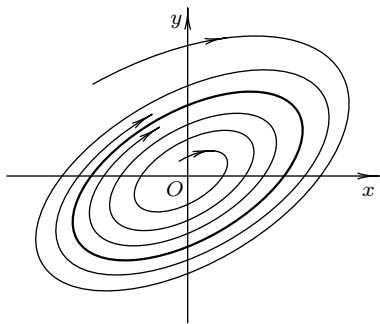


Рис. 4.14.

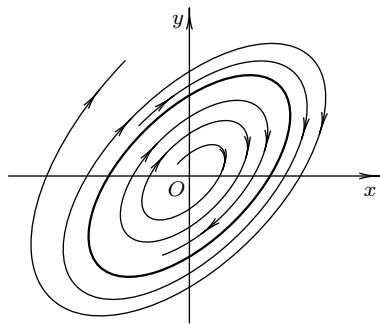


Рис. 4.15.

ному циклу траектории являются спиралями, удаляющимися от предельного цикла при $t \rightarrow \infty$, то предельный цикл называется *неустойчивым*; если же с одной стороны предельного цикла при $t \rightarrow \infty$ спирали приближаются к предельному циклу, а с другой стороны удаляются от него (рис. 4.15), то предельный цикл называется *полуустойчивым*.

Итак, переход от системы первого приближения (4.16) к системе (4.25) приводит, вообще говоря, к превращению центра в фокус, окруженный p (случай $p = 0$ не исключается) предельными циклами.

На стр. 158, исследуя периодические решения автономной квазилинейной системы

$$\ddot{x} + a^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \mu), \quad (4.26)$$

мы уже встречались с аналогичным явлением. Действительно, заменяя (4.26) эквивалентной системой, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -a^2x + \mu f(x, y, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Соответствующая линейная система:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -a^2x$$

имеет в начале координат точку покоя типа центра; добавление малых при малом μ нелинейных членов превращает центр, вообще говоря, в фокус, окруженный несколькими предельными циклами, радиусы которых и определялись из уравнения (2.128) [стр. 160].

Различие между случаями (4.25) и (4.27) заключается лишь в том, что члены R_1 и R_2 малы лишь в достаточно малой окрестности начала координат, тогда как в случае (4.27) слагаемое $\mu f(x, y, \mu)$ может быть сделано малым при достаточно малом μ не только в достаточно малой окрестности начала координат.

В примере 2 [§ 8 гл. 2 стр. 161] при малом μ в окрестности окружности радиуса 6 с центром в начале координат, являющейся траекторией порождающего уравнения, возникает предельный цикл.

В приложениях устойчивым предельным циклам обычно соответствуют автоколебательные процессы, т. е. периодические процессы, в которых малые возмущения практически не изменяют амплитуды и частоты колебаний.

§ 5. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена

В предыдущем параграфе вопрос об устойчивости тривиального решения широкого класса систем дифференциальных уравнений был сведен к исследованию знаков действительных частей корней характеристического уравнения.

Если характеристическое уравнение имеет высокую степень, то его решение представляет значительные трудности, поэтому большое значение имеют методы, позволяющие, не решая уравнения, установить, будут ли все его корни иметь отрицательную вещественную часть или нет.

Теорема 4.6 (теорема Гурвица). ²⁾ *Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех*

²⁾ Доказательство теоремы Гурвица можно найти в курсах высшей алгебры, например в «Курсе высшей алгебры» А. Г. Куроша.

корней многочлена

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

с действительными коэффициентами является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы Гурвица стоят коэффициенты рассматриваемого многочлена в порядке их нумерации, начиная с a_1 до a_n . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, включая и коэффициент $a_0 = 1$, следовательно, элемент матрицы $b_{ik} = a_{2i-k}$. Все недостающие коэффициенты, т. е. коэффициенты с индексами, большими n или меньшими 0, заменяются нулями.

Обозначим главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что так как $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$, то последнее из условий Гурвица $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$ ³⁾.

Применим теорему Гурвица к многочленам второй, третьей и четвертой степени.

а) $z^2 + a_1 z + a_2$.

Условия Гурвица сводятся к $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Эти неравенства в пространстве коэффициентов a_1 и a_2 определяют первую четверть

³⁾ Заметим, что из условий Гурвица следует, что все $a_i > 0$, однако положительность всех коэффициентов недостаточна для того, чтобы действительные части всех корней были бы отрицательными.

(рис. 4.16). На рис. 4.16 изображена область асимптотической устойчивости тривиального решения некоторой системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющей условиям теоремы 4.1, если $z^2 + a_1z + a_2$ является ее характеристическим многочленом.

б) $z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$.

Условия Гурвица сводятся к $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$. Область, определяемая этим неравенством в пространстве коэффициентов, изображена на рис. 4.17.

в) $z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$.

Условия Гурвица сводятся к

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0, \quad (a_1a_2 - a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0, \quad a_4 > 0.$$

Для рассмотренных многочленов условия Гурвица очень удобны и легко проверяемы, однако с возрастанием степени многочлена условия Гурвица быстро усложняются и часто вместо них удобнее применять другие признаки отрицательности действительных частей корней многочлена.

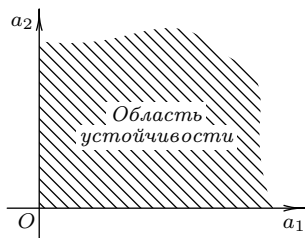


Рис. 4.16.

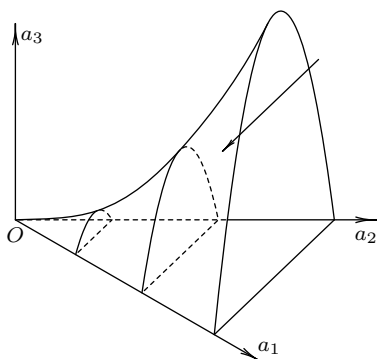


Рис. 4.17.

Пример. При каких значениях параметра α тривиальное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3$$

асимптотически устойчиво?

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ -3 & -k & 0 \\ \alpha & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^3 + k^2 - \alpha k + 6 = 0.$$

По признаку Гурвица условиями асимптотической устойчивости будут $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$. Эти условия в данном случае сводятся к $-\alpha - 6 > 0$, откуда $\alpha < -6$.

§ 6. Случай малого коэффициента при производной высшего порядка

Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра (см. стр. 51) утверждает, что решение дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu)$ непрерывно зависит от параметра μ , если в рассматриваемой замкнутой области изменения t , x и μ функция f непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по x :

$$|f(t, \bar{x}, \mu) - f(t, x, \mu)| \leq N|\bar{x} - x|,$$

где N не зависит от t , x и μ .

В задачах физики и механики условия этой теоремы обычно выполнены, однако один случай разрывной зависимости правой части от параметра, изучению которого и посвящается этот параграф, встречается в приложениях сравнительно часто.

Рассмотрим уравнение

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (4.28)$$

где μ — малый параметр. Задача заключается в том, чтобы выяснить, можно ли при малых значениях $|\mu|$ пренебречь членом $\mu dx/dt$, т. е. приближенно заменить решение уравнения $\mu dx/dt = f(t, x)$ решением так называемого вырожденного уравнения

$$f(t, x) = 0. \quad (4.29)$$

Мы не можем здесь воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения от параметра, так как правая часть уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x) \quad (4.28_1)$$

разрывна при $\mu = 0$.

Предположим пока для упрощения, что вырожденное уравнение (4.29) имеет лишь одно решение $x = \varphi(t)$, предположим также для определенности, что $\mu > 0$. При стремлении параметра μ к нулю производная dx/dt решений уравнения $dx/dt = (1/\mu)f(t, x)$ в каждой точке, в которой $f(t, x) \neq 0$, будет неограниченно возрастать по абсолютной величине, имея знак, совпадающий со знаком функции $f(t, x)$. Следовательно, касательные к интегральным кривым во всех точках, в которых $f(t, x) \neq 0$, стремятся при $\mu \rightarrow 0$ к направлению, параллельному оси Ox , причем если $f(t, x) > 0$, то решение $x(t, \mu)$ уравнения (4.28₁)

возрастает с возрастанием t , так как $dx/dt > 0$, а если $f(t, x) < 0$, то решение $x(t, \mu)$ убывает с возрастанием t , так как $dx/dt < 0$.

Рассмотрим изображенный на рис. 4.18 случай а), при котором знак функции $f(t, x)$ с возрастанием x при фиксированном t меняется при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения с $+$ на $-$.

Стрелками показано поле направлений, касательных к интегральным кривым при достаточно малом μ . Поле направлений устремлено к графику корня вырожденного уравнения. Поэтому каковы бы ни были начальные значения $x(t_0) = x_0$, интегральная кривая, определяемая

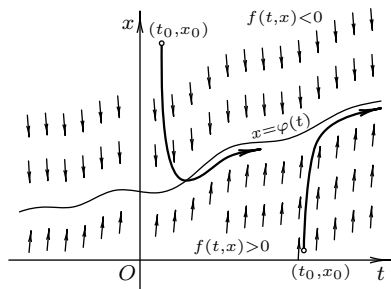


Рис. 4.18.

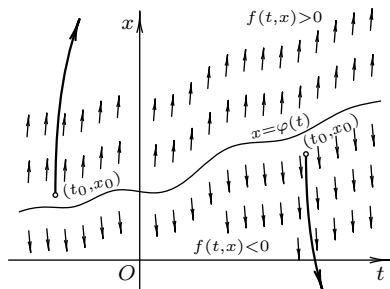


Рис. 4.19.

этим начальными значениями, будучи почти параллельной оси Ox , устремляется к графику корня вырожденного уравнения и при возрастании t уже не может покинуть окрестность этого графика. Следовательно, в этом случае при $t \geq t_1 > t_0$ при достаточно малом μ можно приближенно заменять решение $x(t, \mu)$ уравнения (4.28) решением вырожденного уравнения. В рассмотренном случае решение $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения называется устойчивым.

Рассмотрим случай б) — знак функции $f(t, x)$ при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения с возрастанием x при фиксированном t изменяется с $-$ на $+$. На рис. 4.19 изображено поле направлений, касательных к интегральным кривым при достаточно малом μ . В этом случае очевидно, что каковы бы ни были начальные значения $x(t_0) = x_0$, удовлетворяющие лишь условию $f(t_0, x_0) \neq 0$, интегральная кривая, определяемая этими значениями, при достаточно малом μ , имея почти параллельную оси Ox касательную, удаляется от графика решения $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения. В этом случае решение $x = \varphi(t)$ уравнения (4.29) называется неустойчивым. В неустойчивом случае нельзя заменять решение $x = x(t, \mu)$ исходного уравнения решением вырожденного уравнения, другими словами,

нельзя пренебречь членом $\mu dx/dt$ в уравнении

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

как бы мало μ ни было.

Возможен еще третий, так называемый полуустойчивый, случай в): знак функции $f(t, x)$ при переходе через график решения вырожденного уравнения не изменяется. На рис. 4.20 изображено поле направлений в случае полуустойчивого решения $x = \varphi(t)$.

В полуустойчивом случае, как правило, тоже нельзя приближенно заменять решение исходного уравнения $x = x(t, \mu)$ решением вырожденного уравнения, так как, во-первых, интегральные кривые, определяемые начальными значениями, лежащими с одной стороны от

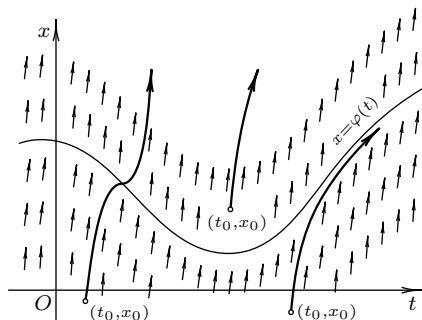


Рис. 4.20.

графика решения $x = \varphi(t)$, удаляются от этого графика, во-вторых, интегральные кривые, приближающиеся к графику решения $x = \varphi(t)$, могут перейти через него на неустойчивую сторону (рис. 4.20) и после этого удалиться от графика решения $x = \varphi(t)$. Наконец, если даже интегральная кривая $x = x(t, \mu)$ остается в окрестности графика решения с его устойчивой стороны, то неизбежные в практических задачах возмущения могут перебросить график решения $x = x(t, \mu)$ на неустойчивую сторону графика решения вырожденного уравнения, после чего интегральная кривая $x = x(t, \mu)$ удалится от графика решения $x = \varphi(t)$.

Заметим, что если на графике решения вырожденного уравнения $\partial f / \partial x < 0$, то заведомо решение $x = \varphi(t)$ устойчиво; если же $\partial f / \partial x > 0$, то решение $x = \varphi(t)$ неустойчиво, так как в первом случае в окрестности кривой $x = \varphi(t)$ функция f убывает с возрастанием x и, следовательно, меняет знак с $+$ на $-$, а во втором случае возрастает с возрастанием x и, значит, при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ функция f меняет знак с $-$ на $+$.

Если вырожденное уравнение имеет несколько решений $x = \varphi_i(t)$, то каждое из них должно быть исследовано на устойчивость, причем в зависимости от выбора начальных значений интегральные кривые исходного уравнения могут вести себя при $\mu \rightarrow 0$ различно. Например,

в изображенном на рис. 4.21 случае трех решений $x = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) вырожденного уравнения, графики которых не пересекаются, решения $x = x(t, \mu)$, $\mu > 0$, исходного уравнения, определяемые начальными точками, лежащими выше графика функции $x = \varphi_2(t)$, стремятся при $t > t_0$ и $\mu \rightarrow 0$ к устойчивому решению вырожденного уравнения

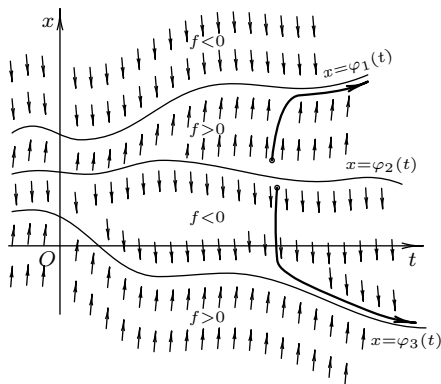


Рис. 4.21.

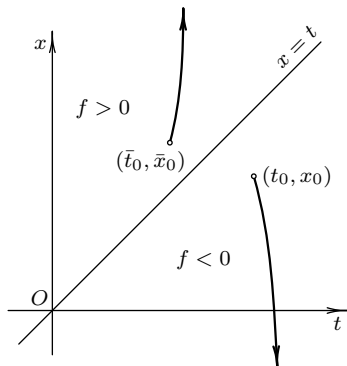


Рис. 4.22.

$x = \varphi_1(t)$, а решения $x = x(t, \mu)$, определяемые начальными точками, лежащими ниже графика функции $x = \varphi_2(t)$, стремятся при $t > t_0$ и $\mu \rightarrow 0$ к устойчивому решению $x = \varphi_3(t)$ вырожденного уравнения (рис. 4.21).

Пример 1. Выяснить, стремится ли решение $x = x(t, \mu)$ уравнения $\mu dx/dt = x - t$, $\mu > 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, к решению вырожденного уравнения $x - t = 0$ при $t > t_0$ и $\mu \rightarrow 0$.

Решение $x = x(t, \mu)$ не стремится к решению вырожденного уравнения $x = t$, так как решение вырожденного уравнения неустойчиво, потому что

$$\frac{\partial(x - t)}{\partial x} = 1 > 0$$

(рис. 4.22).

Пример 2. Тот же вопрос для уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = \sin^2 t - 3e^x.$$

Решение вырожденного уравнения $x = 2 \ln |\sin t| - \ln 3$ устойчиво, так как

$$\frac{\partial(\sin^2 t - 3e^x)}{\partial x} = -3e^x < 0.$$

Следовательно, решение исходного уравнения $x = x(t, \mu)$ стремится к решению вырожденного уравнения для $t > t_0$ при $\mu \rightarrow 0$.

Пример 3. Тот же вопрос для решения уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = x(t^2 - x + 1), \quad \mu > 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Из двух решений $x=0$ и $x=t^2+1$ вырожденного уравнения $x(t^2-x+1)=0$ первое неустойчиво, так как

$$\left. \frac{\partial x(t^2 - x + 1)}{\partial x} \right|_{x=0} = t^2 + 1 > 0,$$

а второе устойчиво, так как

$$\left. \frac{\partial x(t^2 - x + 1)}{\partial x} \right|_{x=t^2+1} = -t^2 - 1 < 0.$$

Если начальная точка (t_0, x_0) лежит в верхней полуплоскости $x > 0$, то интегральная кривая исходного уравнения при $\mu \rightarrow 0$ приближается к графику решения $x = t^2 + 1$ вырожденного уравнения (рис. 4.23) и остается в его окрестности.

Если же начальная точка лежит в нижней полуплоскости $x < 0$, то $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = -\infty$ при $t > t_0$ (рис. 4.23).

Вопрос о зависимости решения от малого коэффициента μ при старшей производной возникает и для уравнений n -го порядка

$$\mu x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}),$$

и для систем дифференциальных уравнений.

Уравнение n -го порядка может быть обычным способом (см. стр. 83) сведено к системе уравнений первого порядка, и следовательно, основная задача заключается в исследовании систем уравнений первого порядка с одним

или несколькими малыми коэффициентами при производных. Эта задача подробно исследована А. Н. Тихоновым [4, 5] и А. Б. Васильевой.

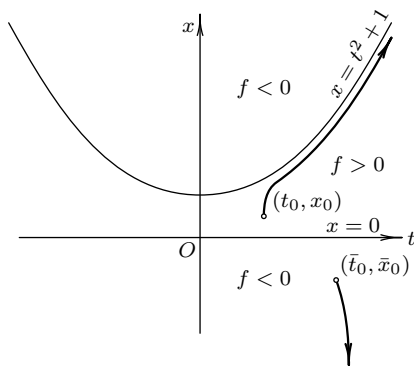


Рис. 4.23.

§ 7. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Если исследуемая система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \quad (4.30)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

подвергается малым кратковременным возмущениям, то систему (4.30) на малом интервале изменения t , $\bar{t}_0 \leq t \leq \bar{\bar{t}}_0$, следует заменить возмущенной системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_i(\bar{t}_0) &= \tilde{x}_i(\bar{t}_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

где все $R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ малы по модулю, а затем при $t \geq \bar{\bar{t}}_0$ возмущения прекращаются, и мы снова возвращаемся к системе (4.30), но уже с несколько измененными начальными значениями в точке \bar{t}_0 , $x_i(\bar{t}_0) = \tilde{x}_i(\bar{t}_0) + \delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где $\tilde{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — исследуемое решение системы (4.30), а все δ_i малы по модулю при малых $|R_i|$ в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра, стр. 51 (рис. 4.24).

Следовательно, действие кратковременных возмущений в конечном счете сводится к возмущениям начальных значений, а вопрос об устойчивости по отношению к таким кратковременным или, как их часто называют, мгновенным возмущениям сводится к рассмотренному выше вопросу об устойчивости в смысле А. М. Ляпунова.

Если же возмущения действуют постоянно, то система (4.30) должна быть заменена системой (4.31) для всех $t \geq t_0$, и возникает совершенно новая задача об

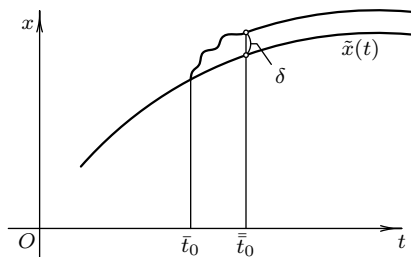


Рис. 4.24.

устойчивости при постоянно действующих возмущениях, исследованная И. Г. Малкиным и Г. Н. Дубошиным.

Так же как при исследовании на устойчивость в смысле А. М. Ляпунова, можно заменой переменных $x_i = y_i - \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) преобразовать исследуемое решение $y_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы $dy_i/dt = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в тривиальное решение

$x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) преобразованной системы. Поэтому в дальнейшем можно считать, что на устойчивость при постоянно действующих возмущениях исследуется тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы уравнений (4.30).

Тривиальное решение системы (4.30) называется *устойчивым* по отношению к постоянно действующим возмущениям, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что из неравенств $\sum_{i=1}^n R_i^2 < \delta_1^2$ при $t \geq t_0$ и $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \delta_2^2$ следует, что

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad t \geq t_0,$$

где $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — решение системы (4.31), определяемое начальными условиями $x_i(t_0) = x_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Теорема 4.7 (теорема Малкина). Если для системы уравнений (4.30) существует дифференцируемая функция Ляпунова $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат при $t \geq t_0$ следующим условиям:

1) $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq w_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, $v(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$, где w_1 — непрерывная функция, обращающаяся в нуль лишь в начале координат;

2) производные $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) ограничены по модулю;

3) производная $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leq -w_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$,

где непрерывная функция $w_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может обращаться в нуль лишь в начале координат, то тривиальное решение системы (4.30) устойчиво по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Доказательство. Заметим, что в силу ограниченности производных $\partial v / \partial x_s$ ($s = 1, 2, \dots, n$) функция v равномерно по отношению к t при $t \geq t_0$ стремится к нулю при $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow 0$, так как по теореме о среднем значении

$$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) x_i,$$

где $(\partial v / \partial x_i)$ — производные, вычисленные для некоторых промежуточных между 0 и x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) значений аргументов x_1, x_2, \dots, x_n .

Заметим также, что вне некоторой δ -окрестности начала координат (т.е. при $\sum_{i=1}^n x_i^2 > \delta^2 > 0$) и при $t \geq t_0$ в силу условий 2) и 3)

производная

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leq -k < 0$$

при достаточно малых по модулю R_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем какую-нибудь поверхность уровня (или одну из ее компонент) $w_1 = l$, $l > 0$, целиком лежащую в ε -окрестности начала координат.

Подвижная при переменном $t \geq t_0$ поверхность уровня $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$, в силу условия 1), лежит внутри поверхности уровня $w_1 = l$ и в то же время, в силу равномерного по t стремления к нулю функции v при $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow 0$, лежит вне некоторой δ_2 -окрестности начала координат, в которой $v < l$, и, следовательно, на поверхности уровня $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$ при любом $t \geq t_0$ производная

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leq -k < 0,$$

если $\sum_{i=1}^n R_i^2 < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, где δ_1 достаточно мало. Траектория, определяемая начальной точкой $x_i(t_0) = x_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), лежащей в указанной выше δ_2 -окрестности начала координат, не может при $t \geq t_0$ выйти за пределы ε -окрестности начала координат, так как, в силу выбора δ_2 , $v(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) < l$, и следовательно, если бы при $t \geq t_0$ траектория выходила за пределы ε -окрестности начала координат или хотя бы за пределы поверхности уровня $w_1 = l$, то она должна была бы при некотором значении $t = T$ первый раз пересечь поверхность уровня $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$, причем в окрестности точки пересечения вдоль траектории функция v должна была бы возрастать, что противоречит условию $dv/dt \leq -k < 0$ вдоль траектории в точках поверхности уровня $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = l$.

Сравнивая условия теоремы Малкина с условиями теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (см. замечание [§ 3 стр. 227]), увидим, что они почти совпадают; дополнительным в теореме Малкина является лишь требование ограниченности производных $\partial v / \partial x_s$ ($s = 1, 2, \dots, n$), так что асимптотическая устойчивость и устойчивость по отношению к постоянно действующим возмущениям являются хотя и не совпадающими, но весьма близкими свойствами.

Пример 1. Устойчиво ли по отношению к постоянно действующим возмущениям тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$ системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a^2 y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -b^2 x - y^3, \end{cases}$$

где a и b — постоянные.

Функцией Ляпунова, удовлетворяющей всем условиям теоремы Малкина, является $v = b^2 x^2 + a^2 y^2$.

Следовательно, точка покоя $x = 0, y = 0$ устойчива по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Пример 2. Устойчива ли точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.32)$$

по отношению к постоянно действующим возмущениям, если все a_{ij} — постоянные, а R_i удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова, стр. 230, т. е. $|R_i| \leq N(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2} + \alpha}$, $\alpha > 0$, N — постоянная, и все корни характеристического уравнения для системы первого приближения различны и отрицательны.

На стр. 232 после замены переменных, приводившей линейные части уравнения (4.32) к каноническому виду, была указана функция Ляпунова $v = \sum_{i=1}^n y_i^2$, удовлетворяющая всем условиям теоремы Малкина, следовательно, точка покоя $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) устойчива по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Тот же результат можно получить, предположив, что действительные части всех корней характеристического уравнения, среди которых могут быть и кратные, отрицательны, но только в этом случае подбор функции Ляпунова значительно усложняется.

Задачи к главе 4

1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3y + x^5, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - y^2. \end{cases}$$

2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0, z = 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = x - y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - 3z, \quad \frac{dz}{dt} = x - 5y - 3z.$$

3. При каких значениях α точка покоя $x = 0, y = 0, z = 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - y, \quad \frac{dy}{dt} = \alpha y - z, \quad \frac{dz}{dt} = \alpha z - x$$

устойчива?

4. При каких значениях α система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \alpha x - x^5, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^5 \end{cases}$$

имеет устойчивую точку покоя $x = 0, y = 0$?

5. К какому пределу стремится решение дифференциального уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = (x^2 + t^2 - 4)(x^2 + t^2 - 9), \quad x(1) = 1$$

при $\mu \rightarrow 0, \mu > 0, t > 1$?

6. К какому пределу стремится решение дифференциального уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = x - t + 5, \quad x(2) = 5 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0, \quad \mu > 0, \quad t > 2?$$

7. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + e^y - \cos y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y - \sin y. \end{cases}$$

8. Устойчиво ли по отношению к постоянно действующим возмущениям решение $x = 0, y = 0$ системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y - x^5, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y^5? \end{cases}$$

9. Устойчиво ли решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 2x + 20 = 0?$$

10. Устойчиво ли решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x + x = 0?$$

11. Какого типа точку покоя $x = 0, y = 0$ имеет система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x - y?$$

12. Определить периодическое решение уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin t$ и исследовать его на устойчивость.

13. $\ddot{x} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = \cos t$. Устойчиво ли периодическое решение этого уравнения?

14. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = y^3 + x^5, \quad \dot{y} = x^3 + y^5.$$

15. Исследовать на устойчивость решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - 2x + e^t, \\ \dot{y} = 5x - 4y + 2. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\ddot{x} + 3\dot{x} + 7 \operatorname{sh} x = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\ddot{x} + (\alpha - 1)\dot{x} + (4 - \alpha^2)x = 0,$$

где α — параметр.

18. Устойчиво ли решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = 3y - x^3, \quad \dot{y} = -4x - 3y^5$$

при постоянно действующих возмущениях?

19. Устойчиво ли тривиальное решение системы

$$\dot{X}(t) = AX(t),$$

где $X(t)$ — вектор в трехмерном пространстве, а

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} ?$$

20. Исследовать на устойчивость решения уравнения

$$\ddot{x} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} = t.$$

21. Исследовать на устойчивость решения уравнения

$$\ddot{x} + 9x = \sin t.$$

22. $\ddot{x} + x = \cos t$. Найти периодическое решение и исследовать его на устойчивость.

23. Найти область устойчивости

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (1 - \alpha)x = 0.$$

24. $\ddot{x} + \ddot{x} + \alpha^2\dot{x} + 5\alpha x = 0$. Найти область устойчивости.

Г Л А В А 5

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные понятия

Как уже отмечалось во введении (стр. 5), *дифференциальными уравнениями в частных производных* называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями более чем одной независимой переменной.

Очень многие физические явления описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x, y, z)$$

описывает распространение световых лучей в неоднородной среде с показателем преломления $n(x, y, z)$; уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

описывает изменение температуры стержня; уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

является уравнением колебания струны; уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

удовлетворяет потенциал поля в областях, не содержащих зарядов, и т. д.

В этой главе мы кратко рассмотрим лишь методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, теория которых тесно связана с интегрированием некоторых систем обыкновенных уравнений.

Уравнениям в частных производных более высокого порядка, интегрирующимся совсем иными методами, посвящается отдельная книга серии.

Рассмотрим несколько простейших примеров.

Пример 1.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = y + x.$$

Интегрируя по x , получаем

$$z(x, y) = xy + \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция y .

Пример 2.

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} \right\} = 0.$$

Интегрируя по x , получаем $\partial z / \partial y = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — произвольная функция y . Интегрируя теперь по y , получим

$$z = \int \varphi(y) dy + \varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ — произвольная функция x . Или, обозначая

$$\int \varphi(y) dy = \varphi_2(y),$$

окончательно будем иметь

$$z(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

где $\varphi_2(y)$, в силу произвольности функции $\varphi(y)$, тоже является произвольной дифференцируемой функцией y .

Приведенные примеры наводят на мысль, что общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка зависит от одной произвольной функции, общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных функций, а общее решение уравнения p -го порядка, вероятно, зависит от p произвольных функций.

Эти предположения оказываются справедливыми, но нуждаются в уточнении. Для их уточнения сформулируем теорему С. В. Ковалевской о существовании и единственности решения уравнения в частных производных.

Теорема 5.1 (теорема Ковалевской). *Существует единственное аналитическое в окрестности точки $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ решение уравнения, разрешенного относительно одной из производных максимального порядка*

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p} = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right), \quad (A)$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} \text{при } x = x_{10}, \quad z = \varphi_0(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad \dots, \\ \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}} = \varphi_{p-1}(x_2, x_3, \dots, x_n), \end{aligned}$$

если функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$ являются аналитическими функциями в окрестности начальной точки $x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}$, а f является аналитической функцией в окрестности начальных значений своих аргументов $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$, $z_0 = \varphi_0(x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0 = \varphi_1(x_{20}, \dots, x_{n0}), \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right)_0 = \left(\frac{\partial^p \varphi_0}{\partial x_n^p}\right)_{x_i=x_{i0}}.$$

Решение определяется заданием начальных функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$, произвольно меняя которые в классе аналитических функций, мы получим совокупность аналитических решений исходного уравнения (A), зависящую от p произвольных функций.

Доказательство этой теоремы, требующее применения теории аналитических функций, мы опускаем.

§ 2. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Линейным неоднородным уравнением или квазилинейным уравнением первого порядка в частных производных называется уравнение

вида

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z). \quad (5.1)$$

Это уравнение линейно относительно производных, но может быть нелинейным относительно неизвестной функции z .

Если правая часть тождественно равна нулю, а коэффициенты X_i не зависят от z , то уравнение (5.1) называется *линейным однородным*.

Для большей наглядности геометрической интерпретации рассмотрим вначале квазилинейное уравнение с двумя независимыми переменными:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (5.1_1)$$

Функции P , Q и R будем считать непрерывными в рассматриваемой области изменения переменных и не обращающимися в нуль одновременно.

Рассмотрим непрерывное векторное поле

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы, направленные по осям координат.

Векторные линии этого поля (т. е. линии, касательная к которым в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением вектора \mathbf{F} в той же точке) определяются из условия коллинеарности вектора $\mathbf{t} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$, направленного по касательной к искомым линиям, и вектора поля \mathbf{F} :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Поверхности, составленные из векторных линий, точнее, поверхности, целиком содержащие векторные линии, имеющие хотя бы одну общую точку с поверхностью, называются *векторными поверхностями* (рис. 5.1).

Очевидно, векторные поверхности можно получить, рассматривая множество точек, лежащих на произвольно выбранном, непрерывно

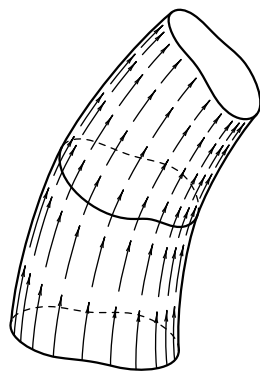


Рис. 5.1.

зависящем от параметра, однопараметрическом семействе векторных линий. Векторная поверхность характеризуется тем, что вектор \mathbf{N} , направленный по нормали к поверхности, в любой точке поверхности ортогонален вектору поля \mathbf{F} :

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}) = 0. \quad (5.2)$$

Если векторная поверхность определяется уравнением $z = f(x, y)$, то вектор

$$\mathbf{N} = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

и условие (5.2) принимает вид

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (5.3)$$

Если векторная поверхность задается уравнением $u(x, y, z) = 0$ и, следовательно, вектор

$$\mathbf{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

то уравнение (5.2) приобретает вид

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

Следовательно, для нахождения векторных поверхностей надо проинтегрировать квазилинейное уравнение (5.3) или линейное однородное уравнение (5.4) в зависимости от того, ищем ли мы уравнение искомым векторных поверхностей в явном или неявном виде.

Так как векторные поверхности могут быть составлены из *векторных линий*, то интегрирование уравнения (5.3) (или (5.4)) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений векторных линий.

Составляем систему дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (5.5)$$

Пусть $\psi_1(x, y, z) = c_1$ и $\psi_2(x, y, z) = c_2$ — два независимых первых интеграла системы (5.5). Выделяем из двухпараметрического

семейства векторных линий $\psi_1(x, y, z) = c_1$, $\psi_2(x, y, z) = c_2$, называемых *характеристиками* уравнения (5.3) (или (5.4)), произвольным способом однопараметрическое семейство, устанавливая какую-нибудь непрерывную зависимость $\Phi(c_1, c_2) = 0$ между параметрами c_1 и c_2 . Исключая из системы

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2, \quad \Phi(c_1, c_2) = 0$$

параметры c_1 и c_2 , получаем искомое уравнение векторных поверхностей:

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0, \quad (5.6)$$

где Φ — произвольная функция. Тем самым найден интеграл квазилинейного уравнения (5.3), зависящий от произвольной функции.

Если требуется найти не произвольную векторную поверхность поля

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

а поверхность, проходящую через заданную линию, определяемую уравнениями $\Phi_1(x, y, z) = 0$ и $\Phi_2(x, y, z) = 0$, то функция Φ в (5.6) уже не будет произвольной, а определится путем исключения переменных x, y, z из системы уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, & \Phi_2(x, y, z) &= 0, \\ \psi_1(x, y, z) &= c_1, & \psi_2(x, y, z) &= c_2, \end{aligned}$$

которые должны одновременно удовлетворяться в точках заданной линии $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$, через которую мы проводим характеристики, определяемые уравнениями $\psi_1(x, y, z) = c_1$, $\psi_2(x, y, z) = c_2$.

Заметим, что задача станет неопределенной, если заданная линия $\Phi_1(x, y, z) = 0$, $\Phi_2(x, y, z) = 0$ является характеристикой, так как в этом случае эту линию можно включить в различные однопараметрические семейства характеристик и тем самым получить различные интегральные поверхности, проходящие через эту линию.

Итак, интеграл квазилинейного уравнения

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z),$$

зависящий от произвольной функции, может быть получен следующим методом: интегрируем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

и, найдя два независимых первых интеграла этой системы:

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

получаем искомый интеграл в виде $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$, где Φ — произвольная функция.

Уравнение интегральной поверхности того же квазилинейного уравнения, проходящей через заданную линию, определяемую уравнениями $\Phi_1(x, y, z) = 0$ и $\Phi_2(x, y, z) = 0$, можно найти, взяв упомянутую выше функцию Φ не произвольно, а определив функцию $\Phi(c_1, c_2)$ путем исключения x, y, z из уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, & \Phi_2(x, y, z) &= 0, \\ \psi_1(x, y, z) &= c_1, & \psi_2(x, y, z) &= c_2, \end{aligned}$$

в результате чего получим уравнение $\Phi(c_1, c_2) = 0$, и искомым интегралом будет $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$.

Пример 1. Определить зависящий от произвольной функции интеграл уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Составляем вспомогательную систему уравнений

$$dx = dy = dz.$$

Ее первые интегралы имеют вид $x - y = c_1$, $z - x = c_2$. Интеграл исходного уравнения $\Phi(x - y, z - x) = 0$, где Φ — произвольная функция, или в разрешенном относительно z виде $z = x + \varphi(x - y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция.

Пример 2. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через кривую $x = 0$, $z = y^2$.

Интегрируем систему уравнений

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0},$$

откуда $z = c_1$, $x^2 + y^2 = c_2$. Исключая x, y и z из уравнений

$$x^2 + y^2 = c_2, \quad z = c_1, \quad x = 0, \quad z = y^2,$$

получаем $c_1 = c_2$, откуда $z = x^2 + y^2$.

Пример 3. Найти интегральную поверхность того же уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через окружность

$$z = 1, \quad x^2 + y^2 = 4. \quad (5.7)$$

Так как заданная линия (5.7) является векторной линией (характеристикой), то задача неопределенна. Действительно, интегральными поверхностями рассматриваемого уравнения являются всевозможные поверхности вращения $z = \Phi(x^2 + y^2)$, ось вращения которых совпадает с осью Oz . Очевидно, существует бесконечное множество таких поверхностей вращения, проходящих через окружность (5.7), например, параболоиды вращения $z = x^2 + y^2 - 3$, $4z = x^2 + y^2$, $z = -x^2 - y^2 + 5$, сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ и т. д.

Если уравнение кривой, через которую требуется провести интегральную поверхность уравнения (5.1₁), дано в параметрической форме:

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s), \quad z_0 = z_0(s), \quad (Б)$$

то обычно и решение удобно искать в параметрической форме:

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s).$$

В систему (5.5), определяющую характеристики, вводим параметр t , полагая

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} = dt. \quad (5.5_1)$$

Для того чтобы характеристики проходили через заданную кривую, ищем решение системы (5.5₁), удовлетворяющее при $t = 0$ (или $t = t_0$) начальным условиям:

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s).$$

При таких начальных условиях при фиксированном s получим характеристику, проходящую через фиксированную точку кривой (Б). При переменном s получим семейство характеристик

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s), \quad (В)$$

проходящих через точки заданной кривой (Б) (при этом предполагается, что заданная кривая (Б) не является характеристикой). Множество, точек, лежащих на этом семействе характеристик (В), и образует искомую интегральную поверхность.

В пространстве с координатами x_1, x_2, \dots, x_n эта система интегралов определяет $(n-1)$ -параметрическое семейство линий, называемых *характеристиками* уравнения (5.8). Докажем, что левая часть любого первого интеграла $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ системы (5.9) является решением исходного линейного однородного уравнения в частных производных (5.8).

Действительно, вдоль любой интегральной кривой системы (5.9) функция $\psi \equiv c$. Следовательно, вдоль любой интегральной кривой

$$d\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0. \quad (5.10)$$

Но вдоль интегральной кривой системы (5.9) дифференциалы dx_i пропорциональны функциям X_i , следовательно, в силу однородности относительно dx_i левой части тождества

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0,$$

дифференциалы dx_i могут быть заменены пропорциональными им величинами X_i , при этом получим, что вдоль интегральных кривых системы (5.9)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} X_i \equiv 0. \quad (5.11)$$

Интегральные кривые системы (5.9) проходят через каждую точку рассматриваемой области изменения переменных x_1, x_2, \dots, x_n и левая часть тождества (5.11) не зависит от постоянных c_1, c_2, \dots, c_{n-1} и, следовательно, не меняется при переходе от одной интегральной кривой к другой, значит, тождество (5.11) справедливо не только вдоль некоторой интегральной кривой, но и во всей рассматриваемой области изменения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , а это и означает, что функция ψ является решением исходного уравнения

$$\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Очевидно, что $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = c$, где Φ — произвольная функция, является первым интегралом системы (5.9), так как вдоль интегральной кривой системы (5.9) все функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ обращаются в постоянные, следовательно, и $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ обращается в постоянную вдоль интегральной кривой системы (5.9). Значит, $z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, где Φ — произвольная дифференцируемая функция, является решением линейного однородного уравнения (5.8).

Докажем, что

$$z = \Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \psi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n))$$

является общим решением уравнения (5.8).

Теорема 5.2.

$$z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная функция, является общим решением уравнения

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad (5.8)$$

т. е. решением, содержащим все без исключения решения этого уравнения.

Доказательство. Допустим, что $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является некоторым решением уравнения (5.8), и докажем, что существует функция Φ такая, что $\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$.

Так как ψ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ являются решениями уравнения (5.8), то

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Рассматривая систему (5.12) как линейную однородную систему n уравнений относительно X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и замечая, что эта однородная система в каждой точке x_1, x_2, \dots, x_n рассматриваемой области имеет нетривиальное решение, так как $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, по предположению, не обращаются в нуль одновременно, приходим к выводу, что

определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

тождественно равен нулю в рассматриваемой области. Но тождественное обращение в нуль якобиана функций $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ указывает на наличие функциональной зависимости между этими функциями:

$$F(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0. \quad (5.13)$$

В силу независимости первых интегралов $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) системы (5.9) по крайней мере один из миноров $(n-1)$ -го порядка якобиана

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}$$

вида

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{n-1}})}$$

отличен от нуля. Следовательно, уравнение (5.13) можно представить в виде

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}).$$

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \quad (5.14)$$

Система уравнений, определяющая характеристики, имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Независимыми первыми интегралами этой системы будут:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}.$$

Общее решение исходного уравнения

$$z = \Phi \left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

является произвольной однородной функцией нулевой степени однородности.

Теорема Эйлера об однородных функциях утверждает, что однородные функции нулевой степени однородности удовлетворяют рассматриваемому уравнению (5.14); теперь мы доказали, что только однородные функции нулевой степени однородности обладают этим свойством.

Неоднородное линейное уравнение первого порядка

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \quad (5.15)$$

где все X_i и Z — непрерывно дифференцируемые функции, не обращающиеся в нуль одновременно в рассматриваемой области изменения переменных x_1, x_2, \dots, x_n, z , интегрируется путем сведения к линейному однородному уравнению.

Для этой цели, так же как и в случае трех переменных, достаточно искать решение z уравнения (5.15) в неявном виде:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0, \quad (5.16)$$

где $\partial u / \partial z \neq 0$.

Действительно, считая, что функция $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена из уравнения (5.16), и дифференцируя тождество

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0$$

по x_i , получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Подставляя найденное $\partial z / \partial x_i$ в (5.15), умножая на $-(\partial u / \partial z)$ и перенося все члены в левую часть уравнения, получим однородное линейное уравнение

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (5.17)$$

которому должна удовлетворять функция u , однако лишь в предположении, что z является функцией x_1, x_2, \dots, x_n , определяемой уравнением $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$.

Итак, надо найти функции u , обращающие линейное однородное уравнение (5.17) в тождество в силу уравнения

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0.$$

Найдем вначале функции u , обращающие уравнение (5.17) в тождество при независимо меняющихся x_1, x_2, \dots, x_n, z . Все такие функции u являются решениями однородного уравнения (5.17) и могут быть найдены уже известным нам способом: составляем систему уравнений, определяющую характеристики

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} &= \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \dots \\ &= \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \frac{dz}{Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}; \end{aligned} \quad (5.18)$$

находим n независимых первых интегралов этой системы:

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= c_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= c_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) &= c_n; \end{aligned}$$

тогда общее решение уравнения (5.17) имеет вид

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

где Φ — произвольная функция.

Решение z уравнения (5.15), зависящее от произвольной функции, определяется из уравнения

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0.$$

Но, кроме найденных этим способом решений, могут быть решения z , которые определяются из уравнений $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, где функция u не является решением уравнения (5.17), а обращает это уравнение в тождество лишь в силу уравнения $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$. Такие решения называются *специальными*.

Специальных решений в некотором смысле не очень много, они не могут образовывать даже однопараметрических семейств.

Действительно, если бы специальные решения образовали однопараметрическое семейство и определялись уравнением

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c, \quad (5.19)$$

где c — параметр, $c_0 \leq c \leq c_1$, то уравнение (5.17) должно было бы обращаться в тождество в силу уравнения (5.19) при любом c . Но так как уравнение (5.17) не содержит c , то оно не может обращаться в тождество в силу уравнения (5.19), содержащего c , и, следовательно, должно быть тождеством по отношению ко всем переменным x_1, x_2, \dots, x_n, z , меняющимся независимо.

Последнее утверждение допускает простую геометрическую интерпретацию. Говоря, что уравнение (5.17) обращается в тождество в силу уравнения $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, мы утверждаем, что уравнение (5.17) обращается в тождество в точках поверхности $u = 0$, но может не обращаться в тождество в других точках пространства x_1, x_2, \dots, x_n, z . Если же уравнение (5.17), не содержащее c , обращается в тождество в силу уравнения $u = c$, где c — непрерывно меняющийся параметр, то это означает, что уравнение (5.17) обращается в тождество на всех непересекающихся и заполняющих некоторую часть D пространства x_1, x_2, \dots, x_n, z поверхностях $u = c$, $c_0 \leq c \leq c_1$, и, следовательно, уравнение (5.17) обращается в тождество в области D при независимо изменяющихся x_1, x_2, \dots, x_n, z .

В конкретных задачах обычно требуется найти решение уравнения (5.15), удовлетворяющее еще каким-нибудь начальным условиям, и так как специальных решений в указанном выше смысле сравнительно мало, то они лишь в совершенно исключительных случаях будут удовлетворять поставленным начальным условиям и поэтому их лишь в редких случаях приходится принимать во внимание.

Пример 6. Проинтегрировать уравнение

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = pz, \quad (5.20)$$

где p — постоянная.

Система уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}$$

имеет следующие независимые интегралы:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{z}{x_n^p} = c_n.$$

Следовательно, решение z исходного уравнения определяется из уравнения

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^p}\right) = 0,$$

откуда

$$z = x_n^p \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Итак, решением является произвольная однородная функция p -й степени однородности.

Можно доказать, что уравнение (5.20) не имеет специальных интегралов, и, следовательно, теорема Эйлера об однородных функциях обратима — уравнению (5.20) удовлетворяют только однородные функции степени однородности p .

Понятие характеристики распространяется на системы квазилинейных уравнений следующего специального вида:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y, u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u, v) \frac{\partial u}{\partial y} &= R_1(x, y, u, v), \\ P(x, y, u, v) \frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, u, v) \frac{\partial v}{\partial y} &= R_2(x, y, u, v). \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma)$$

Характеристиками такой системы называются векторные линии векторного поля в четырехмерном пространстве

$$\mathbf{F} = P(x, y, u, v)\mathbf{i} + Q(x, y, u, v)\mathbf{j} + R_1(x, y, u, v)\mathbf{k}_1 + R_2(x, y, u, v)\mathbf{k}_2,$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 — единичные векторы, направленные соответственно по осям координат Ox , Oy , Ou и Ov .

Характеристики определяются системой уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, u, v)} = \frac{dy}{Q(x, y, u, v)} = \frac{du}{R_1(x, y, u, v)} = \frac{dv}{R_2(x, y, u, v)}. \quad (\Delta)$$

Система уравнений (Γ) в векторной записи имеет вид

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2) = 0,$$

где \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 — векторы с координатами

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1, 0 \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, 0, -1 \right),$$

направленные по нормальям к искомому трехмерным цилиндрическим поверхностям соответственно $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

Следовательно, с геометрической точки зрения интегрирование системы (Г) сводится к нахождению двух трехмерных цилиндрических поверхностей $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, нормали к которым в точках пересечения этих поверхностей ортогональны к векторным линиям.

Очевидно, что это условие будет выполнено, если двухмерная поверхность S , по которой, вообще говоря, пересекаются трехмерные цилиндрические поверхности $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, будет состоять из векторных линий, так как эти векторные линии будут лежать одновременно на поверхностях $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ и, следовательно, будут ортогональны векторам \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 . Взяв какие-нибудь два независимых относительно u и v первых интеграла $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$ и $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$ системы (Д), другими словами, взяв две трехмерные векторные поверхности, мы, вообще говоря, в их пересечении получим двухмерную поверхность S , состоящую из векторных линий, так как если некоторая точка принадлежит одновременно векторным поверхностям $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$ и $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$, то и векторная линия, проходящая через эту точку, лежит в каждой из этих поверхностей.

Разрешая систему уравнений $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$ и $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$ относительно u и v , получим уравнения двух трехмерных цилиндрических поверхностей $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, пересекающихся по той же двухмерной поверхности S , состоящей из векторных линий. Следовательно, найденные функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ будут решениями исходной системы.

Решение системы (Г), зависящее от двух произвольных функций, можно найти, применяя тот же метод, но взяв первые интегралы системы (Д) в наиболее общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\psi_1(x, y, u, v), \psi_2(x, y, u, v), \psi_3(x, y, u, v)) &= 0, \\ \Phi_2(\psi_1(x, y, u, v), \psi_2(x, y, u, v), \psi_3(x, y, u, v)) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Е})$$

где $\psi_1(x, y, u, v)$, $\psi_2(x, y, u, v)$ и $\psi_3(x, y, u, v)$ — независимые первые интегралы системы (Д), а Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции (см. стр. 259).

Уравнения (Е), если сложные функции Φ_1 и Φ_2 независимы относительно u и v , определяют решения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ системы (Г) как неявные функции x и y , зависящие от выбора произвольных функций Φ_1 и Φ_2 .

§ 3. Уравнения Пфаффа

В § 2 [стр. 252] мы рассматривали две задачи, естественно возникающие при изучении непрерывного векторного поля

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Это — задачи о нахождении векторных линий и векторных поверхностей.

Почти так же часто возникает задача о нахождении семейства поверхностей $U(x, y, z) = c$, ортогональных к векторным линиям. Уравнение таких поверхностей имеет вид $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) = 0$, где \mathbf{t} — вектор, лежащий в касательной плоскости к искомым поверхностям:

$$\mathbf{t} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz,$$

или в развернутом виде

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0. \quad (5.21)$$

Уравнения вида (5.21) называются *уравнениями Пфаффа*.

Если поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ потенциально:

$$\mathbf{F} = \text{grad } U, \quad \text{т. е.} \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то искомыми поверхностями являются поверхности уровня $U(x, y, z) = c$ потенциальной функции U . В этом случае нахождение искоемых поверхностей не представляет затруднений, так как

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz,$$

где криволинейный интеграл берется по любому пути между выбранной фиксированной точкой (x_0, y_0, z_0) и точкой с переменными координатами (x, y, z) , например, по ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, параллельных осям координат.

Если же поле \mathbf{F} не потенциально, то в некоторых случаях можно подобрать скалярный множитель $\mu(x, y, z)$, после умножения на который вектора \mathbf{F} поле становится потенциальным.

Если такой множитель существует, то $\mu\mathbf{F} = \text{grad } U$ или

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z},$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \left(Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{1}{\mu} \left(R \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{1}{\mu} \left(P \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial \mu}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Умножая первое из этих тождеств на R , второе на P , третье на Q и складывая почленно все три тождества, получим необходимое условие существования интегрирующего множителя μ :

$$R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$$

или $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$, где вектор $\text{rot } \mathbf{F}$ — вихрь поля — определяется равенством

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Если это условие, называемое условием *полной интегрируемости* уравнения (5.21), не выполнено, то не существует семейства поверхностей $U(x, y, z) = c$, ортогональных векторным линиям поля $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Действительно, если бы такое семейство $U(x, y, z) = c$ существовало, то левая часть уравнения (5.21) могла бы отличаться от

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

лишь некоторым множителем $\mu(x, y, z)$, который и был бы интегрирующим множителем уравнения (5.21).

Итак, для существования семейства поверхностей $U(x, y, z) = c$, ортогональных векторным линиям векторного поля \mathbf{F} , необходимо, чтобы векторы \mathbf{F} и $\text{rot } \mathbf{F}$ были бы ортогональны, т. е. $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) \equiv 0$.

Замечание. Условие $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$ называется также условием интегрируемости уравнения Пфаффа $P dx + Q dy + R dz = 0$ одним соотношением $U(x, y, z) = c$.

Иногда требуется определить не поверхности, ортогональные векторным линиям поля \mathbf{F} , а линии, обладающие тем же свойством, другими словами, надо проинтегрировать уравнение Пфаффа не одним, а двумя соотношениями:

$$U_1(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad U_2(x, y, z) = 0. \quad (5.22)$$

Для нахождения таких линий можно одно из уравнений (5.22) задать произвольно, например

$$U_1(x, y, z) = 0, \quad (5.23)$$

и, исключив из уравнения (5.21) с помощью уравнения (5.23) одно из переменных, например z , получим дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

интегрируя которое, найдем искомые линии на произвольно выбранной поверхности $U_1(x, y, z) = 0$.

Покажем, что условие $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$ является не только необходимым, но и достаточным для существования семейства поверхностей, ортогональных векторным линиям.

Заметим, что на искомых поверхностях $U(x, y, z) = c$ должно обращаться в тождество уравнение

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

или, что то же самое, на этих поверхностях криволинейный интеграл

$$\int_L P dx + Q dy + R dz \quad (5.24)$$

должен быть равен нулю по любому пути (в том числе и по незамкнутым путям).

Рассмотрим всевозможные вихревые поверхности, т.е. векторные поверхности поля $\text{rot } \mathbf{F}$. Очевидно, что в силу теоремы Стокса

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

где $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$, и интеграл (5.24) по любому замкнутому пути на вихревой поверхности равен нулю (так как скалярное произведение единичного вектора нормали к поверхности \mathbf{n} и вектора $\text{rot } \mathbf{F}$ равно нулю). Выберем теперь среди вихревых поверхностей те, на которых все интегралы

$$\int_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_L P dx + Q dy + R dz$$

по незамкнутым путям также равны нулю. Для построения такой поверхности, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0, z_0)$, проведем

через эту точку M какую-нибудь линию, ортогональную векторным линиям поля \mathbf{F} . Такие линии определяются уравнением

$$P dx + Q dy + R dz = 0, \quad (5.21)$$

к которому добавлено уравнение произвольной проходящей через точку M поверхности $z = f(x, y)$ (чаще всего уравнение этой поверх-

ности берут в виде $z = f_1(x)$ или $z = f_2(y)$ или даже в виде $z = a$, где a — постоянная). Подставляя $z = f(x, y)$ в (5.21), получим обыкновенное уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

интегрируя которое и учитывая начальное условие $y(x_0) = y_0$, получим искомую кривую l , проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и ортогональную векторным линиям (рис. 5.2).

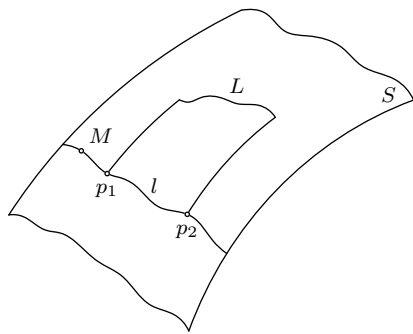


Рис. 5.2.

Если эта линия не является линией вихря, то, проводя через каждую точку линии l линию вихря, получим искомую поверхность S , ортогональную векторным линиям поля \mathbf{F} .

Действительно, взяв любую незамкнутую кривую L на поверхности S (рис. 5.2) и проведя через ее граничные точки вихревые линии до пересечения с кривой l в точках p_1 и p_2 , получим замкнутый контур, состоящий из отрезка линии l между точками p_1 и p_2 , кривой L и двух вихревых линий.

Криволинейный интеграл $\int_C P dx + Q dy + R dz$, взятый по этому замкнутому контуру C , равен нулю, так как контур лежит на вихревой поверхности, причем тот же интеграл, взятый на отрезке дуги l , и по отрезкам вихревых линий равен нулю, так как дуга l и вихревые линии ортогональны векторным линиям поля \mathbf{F} (вихревые линии ортогональны векторным линиям поля \mathbf{F} в силу условия $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$). Следовательно, интеграл $\int_L P dx + Q dy + R dz$ по произвольно выбранному нами незамкнутому пути L равен нулю, т. е. поверхность S является интегральной поверхностью уравнения (5.21), проходящей через заданную точку M .

Этот метод доказательства достаточности условия $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$ для существования семейства поверхностей, ортогональных векторным линиям поля \mathbf{F} , одновременно указывает путь, правда не кратчайший, для нахождения этих поверхностей.

Пример 1.

$$z dx + (x - y) dy + zy dz = 0.$$

Условие $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$, где $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, не выполнено, следовательно, рассматриваемое уравнение не интегрируется одним соотношением.

Пример 2.

$$(6x + yz) dx + (xz - 2y) dy + (xy + 2z) dz = 0.$$

Так как $\text{rot } \mathbf{F} \equiv 0$, где $\mathbf{F} = (6x + yz)\mathbf{i} + (xz - 2y)\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$, то $\mathbf{F} = \text{grad } U$, где

$$U = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (6x + yz) dx + (xz - 2y) dy + (xy + 2z) dz.$$

В качестве пути интегрирования выбираем ломаную, звенья которой параллельны осям координат. Интегрируя, получаем $U = 3x^2 - y^2 + z^2 + xyz$, и следовательно, искомым интегралом является

$$3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = c.$$

Пример 3.

$$yz dx + 2xz dy + xy dz = 0,$$

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}, \quad \text{rot } \mathbf{F} = -x\mathbf{i} + z\mathbf{k}.$$

Условие интегрируемости $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$ выполнено. Находим на какой-нибудь поверхности, например на плоскости $z = 1$, кривые, ортогональные векторным линиям:

$$z = 1, \quad y dx + 2x dy = 0, \quad xy^2 = a.$$

Проводим через кривые семейства $z = 1$, $xy^2 = a$ вихревые поверхности, для чего интегрируем систему уравнений вихревых линий

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}, \quad y = c_1, \quad xz = c_2.$$

Исключая x , y и z из уравнений $z = 1$, $xy^2 = a$, $y = c_1$, $xz = c_2$, получаем $c_1^2 c_2 = a$. Следовательно, искомым интегралом исходного уравнения имеет вид $xy^2 z = a$.

З а м е ч а н и е. Другой, обычно применяемый метод интегрирования уравнения Пфаффа

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0 \quad (5.21)$$

заключается в том, что временно считают z (или другую переменную) постоянной и интегрируют обыкновенное уравнение

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy = 0, \quad (5.25)$$

в котором z играет роль параметра.

Получив интеграл уравнения (5.25)

$$U(x, y, z) = c(z), \quad (5.26)$$

в котором произвольная постоянная может быть функцией параметра z , подбирают эту функцию $c(z)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение (5.21). Дифференцируя (5.26), получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \left[\frac{\partial U}{\partial z} - c'(z) \right] dz = 0. \quad (5.27)$$

Коэффициенты при дифференциалах переменных в уравнениях (5.21) и (5.27) должны быть пропорциональными

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - c'(z)}{R}.$$

Из уравнения

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - c'(z)}{R}$$

можно определить $c'(z)$, так как можно доказать, что при выполнении условия $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$ это уравнение содержит лишь z , $c'(z)$ и $U(x, y, z) = c(z)$.

§ 4. Нелинейные уравнения первого порядка

Рассмотрим сначала случай, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных. Уравнения в частных производных первого порядка с тремя переменными имеют вид

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (5.28)$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Дифференциальное уравнение (5.28) в каждой точке (x, y, z) той области, в которой изменяются первые три аргумента, устанавливает зависимость $\varphi(p, q) = 0$ между числами p и q , определяющими направление нормали $\mathbf{N}(p, q, -1)$ к искомым *интегральным поверхностям* $z = z(x, y)$ уравнения (5.28).

Таким образом, направление нормали к искомым интегральным поверхностям в некоторой точке (x, y, z) не определяется точно, а лишь выделяется однопараметрическое семейство возможных направлений нормалей — некоторый конус допустимых направлений нормалей $\mathbf{N}(p, q, -1)$, где p и q удовлетворяют уравнению $\varphi(p, q) = 0$ (рис. 5.3).

Следовательно, задача интегрирования уравнения (5.28) сводится к нахождению поверхностей $z = z(x, y)$, нормали к которым были бы в каждой точке направлены по одному из допустимых направлений конуса нормалей в этой точке.

Исходя из этой геометрической интерпретации, укажем метод нахождения интеграла уравнения (5.28), зависящего от произвольной функции, если известен его интеграл $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, который зависит от двух параметров a и b .

Интеграл $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ уравнения (5.28), зависящий от двух существенных произвольных постоянных a и b , называется *полным интегралом*.

Так как исходное дифференциальное уравнение (5.28) накладывает ограничения лишь на направление нормалей к искомым

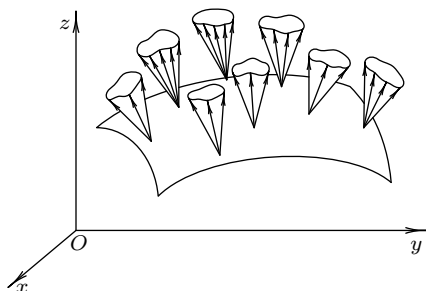


Рис. 5.3.

интегральным поверхностям, то каждая поверхность, нормали к которой совпадают с нормальными к интегральным поверхностям в тех же точках, будет интегральной поверхностью. Следовательно, интегральными поверхностями будут огибающие двухпараметрического или однопараметрического семейства интегральных поверхностей, так как нормаль к огибающей совпадает с нормалью к одной из проходящих через ту же точку интегральных поверхностей семейства.

Огибающая двухпараметрического семейства интегральных поверхностей в предположении существования ограниченных частных производных $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$, не обращающихся в нуль одновременно, и существования производных $\partial\Phi/\partial a$ и $\partial\Phi/\partial b$ определяется уравнениями

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \quad \partial\Phi/\partial a = 0, \quad \partial\Phi/\partial b = 0. \quad (5.29)$$

Выделяя из двухпараметрического семейства интегральных поверхностей $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ произвольным способом однопараметрическое семейство, для чего считаем b произвольной дифференцируемой функцией параметра a , и находя огибающую однопараметрического семейства $\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0$, мы также получим интегральную поверхность. Огибающая этого однопараметрического семейства в предположении существования ограниченных производных функции Φ по всем аргументам и не обращения в нуль одновременно производных $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$ определяется уравнениями

$$\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial a} \{ \Phi(x, y, z, a, b(a)) \} = 0$$

или

$$\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial b} b'(a) = 0. \quad (5.30)$$

Эти два уравнения определяют множество интегральных поверхностей, зависящее от выбора произвольной функции $b = b(a)$. Наличие в уравнениях (5.30) произвольной функции, конечно, не дает права утверждать, что уравнения (5.30) определяют множество всех без исключения интегральных поверхностей исходного уравнения (5.28); например, это множество, вообще говоря, не содержит интегральной поверхности, определяемой уравнениями (5.29), но все же наличие в уравнениях (5.30) произвольной функции обычно уже позволяет выделить интегральную поверхность, удовлетворяющую заданным начальным условиям Коши (см. стр. 252).

Итак, зная полный интеграл, уже можно построить интеграл, зависящий от произвольной функции.

Нахождение полного интеграла во многих случаях не вызывает затруднений, например:

1) Если уравнение (5.28) имеет вид $F(p, q) = 0$ или $p = \varphi(q)$, то, полагая $q = a$, где a — произвольная постоянная, получаем

$$p = \varphi(a), \quad dz = p dx + q dy = \varphi(a) dx + a dy,$$

откуда

$$z = \varphi(a)x + ay + b$$

— полный интеграл.

2) Если уравнение (5.28) может быть приведено к виду $\varphi_1(x, p) = \varphi_2(y, q)$, то, полагая $\varphi_1(x, p) = \varphi_2(y, q) = a$, где a — произвольная постоянная, и разрешая, если это возможно, относительно p и q , получим

$$p = \psi_1(x, a), \quad q = \psi_2(y, a),$$

$$dz = p dx + q dy = \psi_1(x, a) dx + \psi_2(y, a) dy,$$

$$z = \int \psi_1(x, a) dx + \int \psi_2(y, a) dy + b$$

— полный интеграл.

3) Если уравнение (5.28) имеет вид $F(z, p, q) = 0$, то, полагая $z = z(u)$, где $u = ax + y$, получим

$$F\left(z, a \frac{dz}{du}, \frac{dz}{du}\right) = 0.$$

Интегрируя это обыкновенное уравнение, получим $z = \Phi(u, a, b)$, где b — произвольная постоянная, или

$$z = \Phi(ax + y, a, b)$$

— полный интеграл.

4) Если уравнение (5.28) имеет вид, напоминающий уравнение Кле-ро:

$$z = px + qy + \varphi(p, q),$$

то, как нетрудно проверить непосредственной подстановкой, полным интегралом является

$$z = ax + by + \varphi(a, b).$$

Пример 1. Найти полный интеграл уравнения $p = 3q^3$.

$$q = a, \quad p = 3a^3, \quad dz = 3a^3 dx + a dy, \\ z = 3a^3 x + ay + b.$$

Пример 2. Найти полный интеграл уравнения $pq = 2xy$.

$$\frac{p}{x} = \frac{2y}{q} = a, \quad p = ax, \quad q = \frac{2y}{a}, \quad dz = ax dx + \frac{2y}{a} dy, \\ z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{a} + b.$$

Пример 3. Найти полный интеграл уравнения $z^3 = pq^2$.

$$z = z(u), \quad \text{где} \quad u = ax + y, \quad p = a \frac{dz}{du}, \quad q = \frac{dz}{du}, \\ z^3 = a \left(\frac{dz}{du} \right)^3 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{du} = a_1 z, \quad \text{где} \quad a_1 = a^{-1/3}, \\ \ln |z| = a_1 u + \ln b, \quad z = be^{a_1 u}, \\ z = be^{a_1(x/a_1^3 + y)}.$$

Пример 4. Найти полный интеграл уравнения

$$z = px + qy + p^2 + q^2.$$

Полным интегралом является

$$z = ax + by + a^2 + b^2.$$

В более сложных случаях применяется один из общих методов нахождения полного интеграла уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Наиболее простая идея лежит в основе *метода Лагранжа и Шарпи*. По этому методу к уравнению

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (5.28)$$

подбирают уравнение

$$U(x, y, z, p, q) = a \quad (5.31)$$

так, чтобы определяемые из системы уравнений (5.28) и (5.31) функции $p = p(x, y, z, a)$ и $q = q(x, y, z, a)$ приводили бы к интегрирующемуся одним соотношением уравнению Пфаффа

$$dz = p(x, y, z, a) dx + q(x, y, z, a) dy. \quad (5.32)$$

Тогда интеграл уравнения Пфаффа $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, где b — произвольная постоянная, появляющаяся при интегрировании уравнения (5.32), будет полным интегралом уравнения (5.28). Функция U определяется из условия интегрируемости уравнения (5.32) одним соотношением

$$(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{F} = p(x, y, z, a)\mathbf{i} + q(x, y, z, a)\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

т. е. в развернутом виде из уравнения

$$p \frac{\partial q}{\partial z} - q \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (5.33)$$

Производные $\partial q / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial p / \partial z$, $\partial q / \partial z$ вычисляются дифференцированием тождеств

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ U(x, y, z, p, q) &= a, \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

в которых p и q рассматриваются как функции x , y и z , определяемые системой (5.34).

Дифференцируя по x , получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\frac{D(F, U)}{D(p, x)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Аналогично, дифференцируя (5.34) по y и определяя $\partial p/\partial y$, получим

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\frac{D(F, U)}{D(y, q)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Дифференцируя (5.34) по z и разрешая относительно $\partial p/\partial z$, $\partial q/\partial z$, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial z} &= - \frac{\frac{D(F, U)}{D(z, q)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}}, \\ \frac{\partial q}{\partial z} &= - \frac{\frac{D(F, U)}{D(p, z)}}{\frac{D(F, U)}{D(p, q)}}.\end{aligned}$$

Подставляя вычисленные производные в условие интегрируемости (5.33) и умножая на определитель $(D(F, U)/D(p, q))$, который мы считаем отличным от нуля, получим

$$\begin{aligned}p \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + q \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \frac{\partial U}{\partial z} \\ - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial U}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial U}{\partial q} = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Для определения функции U мы получили однородное линейное уравнение (5.35), которое интегрируется методом, указанным в § 2 этой главы: составляется уравнение характеристик

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}} = - \frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}}, \quad (5.36)$$

находится хотя бы один первый интеграл системы (5.36)

$$U_1(x, y, z, p, q) = a,$$

и если функции F и U_1 независимы по отношению к p и q , т.е. $(D(F, U_1)/D(p, q)) \neq 0$, то первый интеграл $U_1(x, y, z, p, q)$ и будет искомым решением уравнения (5.35).

Следовательно, определяя $p = p(x, y, z, a)$ и $q = q(x, y, z, a)$ из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ U_1(x, y, z, p, q) &= a \end{aligned} \right\}$$

и подставляя в

$$dz = p(x, y, z, a) dx + q(x, y, z, a) dy,$$

получим интегрируемое одним соотношением уравнение Пфаффа, решая которое, находим полный интеграл исходного уравнения

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0.$$

Пример 5. Найти полный интеграл уравнения

$$yzp^2 - q = 0. \quad (5.37)$$

Система (5.36) имеет вид

$$\frac{dx}{2pyz} = -dy = \frac{dz}{2p^2yz - q} = -\frac{dp}{yp^3} = -\frac{dq}{zp^2 + yp^2q}.$$

Воспользовавшись исходным уравнением, упрощаем знаменатель третьего отношения и получаем интегрируемую комбинацию

$$\frac{dz}{p^2 y z} = -\frac{dp}{p^3 y},$$

откуда

$$p = \frac{a}{z}. \quad (5.38)$$

Из уравнений (5.37) и (5.38) находим $p = a/z$, $q = a^2 y/z$, откуда $dz = (a/z) dx + (a^2 y/z) dy$. Умножая на $2z$ и интегрируя, находим полный интеграл исходного уравнения $z^2 = 2ax + a^2 y^2 + b$.

Зная полный интеграл $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

можно, вообще говоря, решить основную начальную задачу (см. стр. 252) или даже более общую задачу об определении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (5.39)$$

Определим функцию $b = b(a)$ так, чтобы огибающая однопараметрического семейства

$$\Phi(x, y, z, a, b(a)) = 0, \quad (5.40)$$

определяемая уравнениями (5.40) и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} b'(a) = 0, \quad (5.41)$$

проходила бы через заданную кривую (5.39).

В точках заданной кривой оба уравнения (5.40) и (5.41) по t обращаются в тождества:

$$\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a)) = 0 \quad (5.42)$$

и

$$\frac{\partial \Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial a} + \frac{\partial \Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial b} b'(a) = 0. \quad (5.43)$$

Однако определить из этих уравнений функцию $b = b(a)$ было бы довольно сложно. Значительно проще можно определить эту функцию из системы уравнений (5.42) и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z'(t) = 0, \quad (5.44)$$

или в краткой записи

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}) = 0,$$

где \mathbf{t} — вектор касательной к заданной кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (5.39)$$

а \mathbf{N} — вектор нормали к поверхности $\Phi = 0$, а следовательно, и к искомой огибающей в соответствующих точках. Условие (5.44) геометрически очевидно, так как искомая поверхность должна проходить через заданную кривую и, следовательно, касательная к этой кривой должна лежать в касательной плоскости к искомой поверхности.

Пример 6. Найти интегральную поверхность уравнения $z = px + qy + pq/4$, проходящую через кривую $y = 0, \quad z = x^2$.

Полный интеграл этого уравнения (см. случай 4) [стр. 275]) имеет вид $z = ax + by + ab/4$. Уравнение заданной кривой можно написать в параметрической форме $x = t, \quad y = 0, \quad z = t^2$.

Для определения функции $b = b(a)$ составляем систему уравнений (5.42) и (5.44), которые в данном случае имеют вид $t^2 = at + ab/4$ и $2t = a$, откуда $b = -a, \quad z = a(x - y) - a^2/4$. Огибающая этого семейства определяется уравнениями

$$z = a(x - y) - \frac{a^2}{4}$$

и

$$x - y - \frac{a}{2} = 0.$$

Исключая a , получим $z = (x - y)^2$.

Если система (5.36) легко интегрируется, то для решения поставленной обобщенной задачи Коши очень удобен излагаемый ниже *метод характеристик — метод Коши*.

Интегральную поверхность $z = z(x, y)$ уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

проходящую через заданную кривую

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s), \quad z_0 = z_0(s),$$

можно, как и для квазилинейного уравнения (см. стр. 257), представлять себе состоящей из точек, лежащих на некотором однопараметрическом семействе кривых

$$\begin{aligned}x &= x(t, s), & y &= y(t, s), \\z &= z(t, s),\end{aligned}$$

где s — параметр семейства, называемых *характеристиками*.

Вначале мы найдем семейство характеристик, зависящее от нескольких параметров, а затем, проводя характеристики через точки кривой

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0(s), & y_0 &= y_0(s), \\z_0 &= z_0(s)\end{aligned}$$

и удовлетворяя еще некоторым условиям, выделим однопараметрическое семейство кривых, в которых параметром можно считать s :

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s)$$

(рис. 5.4). Множество точек, лежащих на этих кривых, и образует искомую интегральную поверхность. Такова в кратких чертах идея метода Коши.

Пусть $z = z(x, y)$ является интегральной поверхностью уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (5.45)$$

Тогда, дифференцируя тождество (5.45) по x и по y , получим

$$\begin{aligned}F_x + pF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\F_y + qF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

или, так как $\partial q / \partial x = \partial p / \partial y$, будем иметь

$$\left. \begin{aligned}F_x + F_z p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\F_y + F_z q + F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

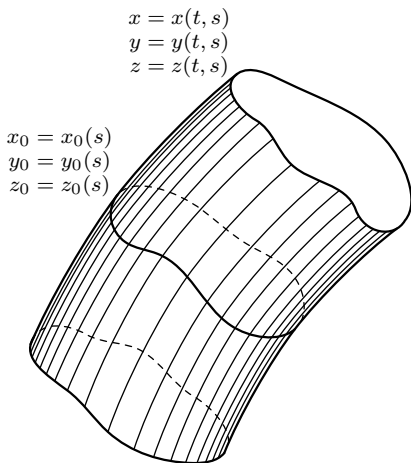


Рис. 5.4.

Уравнения характеристик для системы уравнений (5.46), квазилинейной относительно p и q , причем z считается известной функцией от x и y , имеют вид (см. стр. 265)

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt. \quad (5.47)$$

Так как z связано с p и q уравнением

$$dz = p dx + q dy, \quad (5.48)$$

то вдоль характеристики

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q$$

или

$$\frac{dz}{pF_p + qF_q} = dt, \quad (5.49)$$

что дает возможность дополнить систему (5.47) еще одним уравнением (5.49).

Итак, в предположении, что $z = z(x, y)$ является решением уравнения (5.45), приходим к системе

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt. \quad (5.50)$$

Из уравнений (5.50) можно, не зная решения $z = z(x, y)$ уравнения (5.45), найти функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $p = p(t)$, $q = q(t)$, т. е. можно найти кривые

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

называемые *характеристиками*, и в каждой точке характеристики найти числа $p = p(t)$ и $q = q(t)$, определяющие направление плоскости

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \quad (5.51)$$

Характеристика вместе с отнесенной к каждой ее точке плоскостью (5.51) называется *характеристической полосой*.

Покажем, что из характеристик может быть образована искомая интегральная поверхность уравнения $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Прежде всего заметим, что вдоль интегральной кривой системы (5.50) функция F сохраняет постоянное значение

$$F(x, y, z, p, q) = c,$$

другими словами, функция $F(x, y, z, p, q)$ является первым интегралом системы (5.50).

Действительно, вдоль интегральной кривой системы (5.50)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x, y, z, p, q) &= F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + F_p \frac{dp}{dt} + F_q \frac{dq}{dt} \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (p F_p + q F_q) - F_p (F_x + p F_z) \\ &\quad - F_q (F_y + q F_z) \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

следовательно, вдоль интегральной кривой системы (5.50)

$$F(x, y, z, p, q) = c, \quad \text{где} \quad c = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Для того чтобы вдоль интегральных кривых системы (5.50) удовлетворялось уравнение $F(x, y, z, p, q) = 0$, надо начальные значения $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ выбирать так, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0.$$

Интегрируя систему (5.50) при начальных значениях $x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$, $p_0 = p_0(s)$, $q_0 = q_0(s)$, удовлетворяющих уравнению $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$, получим $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, $z = z(t, s)$, $p = p(t, s)$, $q = q(t, s)$.

При фиксированном s будем иметь одну из характеристик

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s),$$

меняя s , получим некоторую поверхность. В каждой точке этой поверхности при $p = p(t, s)$, $q = q(t, s)$ уравнение $F(x, y, z, p, q) = 0$ удовлетворяется, но надо еще выяснить, будет ли при этом $p = \partial z / \partial x$ и $q = \partial z / \partial y$, или, что то же самое, будет ли $dz = p dx + q dy$, или

$$dz = p \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + q \left(\frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt,$$

что эквивалентно двум условиям:

$$p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad (5.52)$$

$$p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \quad (5.53)$$

Второе из этих уравнений, очевидно, обращается в тождество, так как при составлении системы (5.50) мы уже требовали, чтобы вдоль характеристики $dz = p dx + q dy$. Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно, если принять во внимание, что в силу системы (5.50),

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F_p, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = F_q, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = pF_p + qF_q$$

(в (5.50) вместо $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial t$, $\partial z/\partial t$ мы писали dx/dt , dy/dt , dz/dt , так как считали s фиксированным).

Для того чтобы удовлетворялось уравнение (5.52), необходимо наложить еще некоторые ограничения на выбор начальных значений $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$. Действительно, обозначим

$$p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} = U \quad (5.54)$$

и докажем, что $U \equiv 0$, если начальное значение $U|_{t=0} = 0$, откуда будет следовать, что если начальные функции

$$x_0(s), \quad y_0(s), \quad z_0(s), \quad p_0(s), \quad q_0(s)$$

выбрать так, что

$$p_0(s)x'_0(s) + q_0(s)y'_0(s) - z'_0(s) = 0,$$

то $U \equiv 0$ для всех t .

Дифференцируя (5.54) по t , получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$$

и, принимая во внимание результат дифференцирования тождества (5.53) по s :

$$\frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + p \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + q \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 0,$$

будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}$$

или, в силу уравнений (5.50),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -(F_x + pF_z) \frac{\partial x}{\partial s} - (F_y + qF_z) \frac{\partial y}{\partial s} - F_p \frac{\partial p}{\partial s} - F_q \frac{\partial q}{\partial s} \\ &= - \left(F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s} + F_z \frac{\partial z}{\partial s} + F_p \frac{\partial p}{\partial s} + F_q \frac{\partial q}{\partial s} \right) \\ &\quad - F_z \left(p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial s} \{F\} - F_z U \\ &= -F_z U, \end{aligned}$$

так как $F \equiv 0$, и следовательно, полная частная производная $\frac{\partial}{\partial s} \{F\} = 0$. Из уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -F_z U \quad (5.55)$$

находим

$$U = U_0 e^{-\int_0^t F_z dt}.$$

Следовательно, если $U_0 = 0$, то $U \equiv 0$, что, впрочем, следует и из единственности решения $U \equiv 0$ линейного уравнения (5.55), удовлетворяющего условию $U|_{t=0} = 0$.

Итак, при интегрировании уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (5.45)$$

с начальными условиями $x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$ по методу Коши надо из уравнений

$$F(x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0$$

и

$$p_0(s)x'_0(s) + q_0(s)y'_0(s) - z'_0(s) = 0$$

определить функции $p_0 = p_0(s)$ и $q_0 = q_0(s)$ и затем интегрировать систему уравнений

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt \quad (5.50)$$

с начальными условиями: при $t = 0$

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s).$$

Три функции

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s)$$

из решения системы (5.50) и дают в параметрическом виде уравнение искомой интегральной поверхности уравнения (5.45).

Все вышеизложенное легко обобщается на нелинейные уравнения в частных производных с произвольным числом независимых переменных

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (5.56)$$

где

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Требуется определить интегральную n -мерную поверхность $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнения (5.56), проходящую через заданную $(n-1)$ -мерную поверхность:

$$\begin{aligned} x_{i0} &= x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ z_0 &= z_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Временно предположим, что нам известны начальные значения функций

$$p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (5.58)$$

тогда, интегрируя вспомогательную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{F_{p_1}} &= \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{dz}{\sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}} \\ &= -\frac{dp_1}{F_{x_1} + p_1 F_z} = \dots = -\frac{dp_n}{F_{x_n} + p_n F_z} = dt \end{aligned} \quad (5.59)$$

с начальными условиями (5.57) и (5.58), получим

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ z &= z(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ p_i &= p_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.60)$$

При фиксированных s_1, s_2, \dots, s_{n-1} уравнения (5.60) определяют в пространстве с координатами x_1, x_2, \dots, x_n, z кривые, называемые *характеристиками*, каждой точке которых отнесены еще числа $p_i = p_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, определяющие направление некоторых плоскостей

$$Z - z = \sum_{i=1}^n p_i (X_i - x_i). \quad (5.61)$$

Характеристики вместе с плоскостями (5.61) образуют так называемые *характеристические полосы*.

При изменении параметров s_1, s_2, \dots, s_{n-1} получаем $(n-1)$ -параметрическое семейство характеристик

$$x_i = x_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \quad z = z(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}),$$

проходящих через заданную $(n-1)$ -мерную поверхность (5.57).

Покажем, что при определенном выборе функций

$$p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

точки, лежащие на характеристиках семейства (5.60), образуют исковую n -мерную интегральную поверхность. Следовательно, надо будет доказать, что при определенном выборе функций $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$:

- 1) $F(x_1(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_n(t, s_1, \dots, s_{n-1}), z(t, s_1, \dots, s_{n-1}), p_1(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, p_n(t, s_1, \dots, s_{n-1})) \equiv 0$,
- 2) $p_i = (\partial z / \partial x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$, или, что то же самое,

$$dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i.$$

Нетрудно проверить, что функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n)$ является первым интегралом системы уравнений (5.59). Действительно, вдоль интегральных кривых системы (5.59)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &\equiv \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{dx_i}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{dp_i}{dt} \\ &\equiv \sum_{i=1}^n F_{x_i} F_{p_i} + F_z \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n F_{p_i} (F_{x_i} + p_i F_z) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, вдоль интегральных кривых системы (5.59)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = c,$$

где c — постоянная, равная $F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, z, p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0})$.

Для того чтобы функции (5.60) удовлетворяли уравнению (5.56) вдоль интегральных кривых системы (5.59), надо выбрать начальные значения $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ так, чтобы

$$F(x_{10}(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, x_{n0}(s_1, \dots, s_{n-1}), z(s_1, \dots, s_{n-1}), \\ p_1(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, p_n(s_1, \dots, s_{n-1})) = 0.$$

Остается проверить, что $dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ или

$$\frac{\partial z}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial s_j} ds_j \equiv \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} ds_j \right).$$

Это тождество эквивалентно следующим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0 \quad (5.62)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (5.63)$$

Справедливость тождества (5.62) становится очевидной, если принять во внимание, что, в силу системы (5.59),

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(вместо dz/dt и dx_i/dt мы пишем частные производные, так как в системе (5.59) все s_j предполагались фиксированными).

Для доказательства тождеств (5.63), справедливых лишь при определенном выборе начальных значений $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, обозначим:

$$U_j = \frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

и, дифференцируя U_j по t , получим

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \quad (5.64)$$

Принимая во внимание результат дифференцирования тождества (5.62) по s_j

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0,$$

можно переписать уравнение (5.64) в виде

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}.$$

Воспользовавшись системой (5.59), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial s_j} F_{p_i} + \sum_{i=1}^n (F_{x_i} + p_i F_z) \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_j} - \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s_j} \{F\} - F_z U_j. \end{aligned}$$

Полная частная производная $(\partial/\partial s_j)\{F\} = 0$, так как $F \equiv 0$, и следовательно, функции U_j являются решениями линейных однородных уравнений $(\partial U_j/\partial t) = -F_z U_j$, которые имеют единственное решение $U_j \equiv 0$, если $U_j|_{t=0} = 0$. Следовательно, если начальные значения $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) выбрать так, что $U_j|_{t=0} = 0$ или

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \right)_{t=0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

и, следовательно, на поверхности (5.60) $dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i$, т. е.

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Итак, для нахождения интегральной поверхности уравнения $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$, проходящей через $(n-1)$ -мерную поверхность

$$\begin{aligned} x_{i0} &= x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ z_0 &= z_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \end{aligned}$$

надо определить начальные значения $p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ из уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, z, p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0}) &= 0, \\ \frac{\partial z_0}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n p_{i0} \frac{\partial x_{i0}}{\partial s_j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

после чего, интегрируя систему (5.59) [стр. 286] с начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} x_{i0} &= x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ z_0 &= z_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \\ p_{i0} &= p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

получим:

$$x_i = x_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.66)$$

$$z = z(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \quad (5.67)$$

$$p_i = p_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения (5.66) и (5.67) являются параметрическими уравнениями искомой интегральной поверхности.

З а м е ч а н и е. Мы предполагали, что система уравнений (5.65) разрешима относительно p_{i0} , а также, что система (5.59) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Пример 7. Найти интегральную поверхность уравнения $z = pq$, проходящую через прямую $x = 1, \quad z = y$.

Запишем уравнение прямой $x = 1, \quad z = y$ в параметрической форме $x_0 = 1, \quad y_0 = s, \quad z_0 = s$. Определяем $p_0(s)$ и $q_0(s)$ из уравнений (5.65): $s = p_0 q_0, \quad 1 - q_0 = 0$, откуда $p_0 = s, \quad q_0 = 1$. Интегрируем систему (5.59):

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = dt,$$

$$p = c_1 e^t, \quad q = c_2 e^t, \quad x = c_2 e^t + c_3, \quad y = c_1 e^t + c_4, \quad z = c_1 c_2 e^{2t} + c_5.$$

Принимая во внимание, что при $t = 0$

$$x = 1, \quad y = s, \quad z = s, \quad p = s, \quad q = 1,$$

получим

$$p = se^t, \quad q = e^t, \quad x = e^t, \quad y = se^t, \quad z = se^{2t}.$$

Следовательно, искомой интегральной поверхностью является

$$x = e^t, \quad y = se^t, \quad z = se^{2t} \quad \text{или} \quad z = xy.$$

Пример 8. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2$$

при условии, что при $x = 0$, $z = y$, или в параметрической форме $x_0 = 0$, $y_0 = s$, $z_0 = s$.

Определяем $p_0(s)$ и $q_0(s)$:

$$p_0^2 + q_0^2 = 2, \quad 1 - q_0 = 0,$$

откуда $q_0 = 1$, $p_0 = \pm 1$.

Интегрируем систему уравнений (5.59):

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{4} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = dt,$$

$$p = c_1, \quad q = c_2, \quad x = 2c_1t + c_3, \quad y = 2c_2t + c_4, \quad z = 4t + c_5;$$

пользуясь начальными условиями $p_0 = \pm 1$, $q_0 = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = s$, $z_0 = s$, получим $p = \pm 1$, $q = 1$, $x = \pm 2t$, $y = 2t + s$, $z = 4t + s$. Последние три уравнения и являются параметрическими уравнениями искомой интегральной поверхности. Исключая параметры t и s , получим $z = y \pm x$.

В задачах механики часто приходится решать задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (5.68)$$

где $p_i = (\partial v / \partial x_i)$, являющегося частным случаем уравнения (5.56) [стр. 286]. Метод Коши, который в применении к уравнению (5.68) часто называется *первым методом Якоби*, приводит нас к системе уравнений

$$dt = \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}$$

$$= -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = -\frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \dots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{dv}{\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial t}},$$

откуда

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.69)$$

и

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial t},$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \quad (5.70)$$

Система $2n$ уравнений (5.69) не содержит v и может быть проинтегрирована независимо от уравнения (5.70), после чего из уравнения (5.70) функция v находится квадратурой. В этом и заключается некоторое своеобразие применения метода Коши к уравнению (5.68). Кроме того, в рассматриваемом случае нет необходимости вводить в систему (5.50) [стр. 285] вспомогательный параметр, так как эту роль с успехом может играть независимая переменная t .

Задачи к главе 5

1. $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
2. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.
3. $x \frac{\partial z}{\partial y} = z$.
4. $z \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
5. $y \frac{\partial z}{\partial x} = z$; при $x = 2$, $z = y$.
6. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$; при $y = 1$, $z = 3x$.
7. $yz \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; при $x = 0$, $z = y^3$.
8. Найти поверхности, ортогональные поверхностям семейства $z = axy$.
9. Найти поверхности, ортогональные поверхностям семейства $xyz = a$.
10. $\frac{x}{3} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{5} \frac{\partial z}{\partial y} = z - 5$.
11. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
12. $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 3z \frac{\partial u}{\partial z} = 4u$.

13. $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 0.$

14. $\frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; при $x = 1, z = y^2.$

15. Интегрируется ли уравнение

$$(y^2 + z^2 - x^2) dx + xz dy + xy dz = 0$$

одним соотношением?

16. Проинтегрировать одним соотношением уравнение

$$(y + 3z^2) dx + (x + y) dy + 6xz dz = 0.$$

17. Найти полный интеграл уравнения

$$pq = x^2 y^2.$$

18. Найти полный интеграл уравнения

$$z = px + qy + p^3 q^3.$$

19. Найти полный интеграл уравнения

$$pq = 9z^2.$$

20. Найти полный интеграл уравнения

$$p = \sin q.$$

21. Найти поверхности, ортогональные векторным линиям векторного поля

$$\mathbf{F} = (2xy - 3yz)\mathbf{i} + (x^2 - 3xz)\mathbf{j} - 3xy\mathbf{k}.$$

22. Найти семейство поверхностей, ортогональных векторным линиям векторного поля

$$\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (3y - z)\mathbf{j} + (x - 2y)\mathbf{k}.$$

23. Найти векторные линии, векторные поверхности и поверхности, ортогональные векторным линиям поля

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}.$$

24. $z = pq + 1$; при $y = 2, z = 2x + 1.$

25. $2z = pq - 3xy$; при $x = 5, z = 15y.$

26. $4z = p^2 + q^2$; при $x = 0, z = y^2.$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

К главе 1

1. $\sin y \cos x = c$. 2. $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = c$. 3. $x^2 - 2cy = c^2$.
 4. $y = c/x + x^3/4$. 5. $y^2/2 + y/x = c$. 6. $x = ce^{-3t} + e^{2t}/5$. 7. $y = c \cos x + \sin x$.
 8. $e^x - e^y = c$. 9. $x = ce^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$. 10. Однородное уравнение:
 $x = ye^{cy+1}$. 11. $y = cx$ и $y^2 - x^2 = c$. 12. $y^2 = \frac{1}{(3x+c)^2}$. 13. $\ln |t| = c - e^{-(x/t)}$.
 14. Можно ввести параметр, полагая $y' = \cos t$ $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c. \end{cases}$ 15. $y =$
 $cx + \frac{1}{c}$; особое решение $y^2 = 4x$. 16. $\begin{cases} x = p^3 - p + 2, \\ y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + c. \end{cases}$ 17. Уравнение
 линейно относительно x и $\frac{dx}{dy}$, $x = cy + \frac{y^3}{2}$. 18. $\begin{cases} x = \frac{4}{3}p^3 - \frac{3}{2}p^2 + c, \\ y = p^4 - p^3 - 2. \end{cases}$
 19. Гиперболы $x^2 - y^2 = c$. 20. Дифференциальное уравнение искомым кривых $y/(2x) = y'$. Отв. $y^2 = 2cx$. 21. Дифференциальное уравнение искомым кривых $y - xy' = x$. Отв. $y = cx - x \ln |x|$. 22. $x^2 + y^2 - 2cy = 0$.
 Особенно просто задача решается в полярных координатах. 23. Дифференциальное уравнение задачи $dT/dt = k(T - 20)$. Отв. Через 1 час.
 24. Дифференциальное уравнение задачи $dv/dt = kv$, где v — скорость. Отв. $v \approx 0,466$ км/час. 25. Если поместить начало координат в заданную точку и направить ось абсцисс параллельно данному в условиях задачи направлению, то дифференциальное уравнение кривых, вращением которых образуется искомая поверхность, имеет вид $y' = (-x \pm \sqrt{x^2 + y^2})/y$

(или $dx - d\rho = 0$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). *Отв.* Осевое сечение искомой поверхности определяется уравнением $y^2 = 2cx + c^2$, поверхность является параболоидом вращения. **26.** $y = 2\sin(x - c)$. **27.** Дифференциальное уравнение искомых кривых $y' = -(y/x)$. *Отв.* Гиперболы $xy = c$.

28. $(x + y + 1)^3 = c(x - y + 3)$. **29.** $y = \frac{2(1+x)}{c+2x+x^2}$. **30.** $y(0,5) \approx 0,13$.

31. $y(0,6) \approx 0,07$. **32.** $y(0,02) \approx 1,984$; $y(0,04) \approx 1,970$; $y(0,06) \approx 1,955$; $y(0,08) \approx 1,942$; $y(0,10) \approx 1,930$; $y(0,12) \approx 1,917$; $y(0,14) \approx 1,907$; $y(0,16) \approx 1,896$; $y(0,18) \approx 1,886$; $y(0,20) \approx 1,877$; $y(0,22) \approx 1,869$; $y(0,24) \approx 1,861$;

$y(0,26) \approx 1,854$; $y(0,28) \approx 1,849$; $y(0,30) \approx 1,841$. **33.** $\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} + \frac{2p}{3}, \\ y = 2px - p^2 \end{cases}$

и $y = 0$. **34.** $x + \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = c$. **36.** $(x + y + 1)^3 = ce^{2x+y}$. **37.** $y = c$;

$y = e^x + c$; $y = -e^x + c$. **38.** $y^2 = 2cx + c^2$. **39.** Не имеет. **40.** $y_1 = \frac{x^2 - 1}{2}$;

$y_2 = \frac{x^2 - 1}{2} + \frac{2}{15} - \frac{1}{4}x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20}$. **41.** $y = 2x^2 - x$. **42.** Не имеет. **43.** $x = ce^{x-y}$.

44. $x^2 + 3y^2/2 = c^2$. **45.** $x = 2t$. **46.** $x = t^2$. **47.** $y = -x + 1$ и $y = -x^2/4$.

48. Действительного решения не существует. **49.** $3x - 4y + 1 = ce^{x-y}$.

50. $x = (4t + c)\sin t$. **51.** $y = cx + (c^2 - x^2)/2$ и особое решение $y = -x^2$.

52. $y = \frac{7x^3}{x^7 + c}$, $y = 0$. **53.** $x - c = \frac{a}{2}(2t - \sin 2t)$, $y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t)$ —

семейство циклоид. Особое решение $y = a$. *Указание:* удобно ввести

параметр t , полагая $y' = \operatorname{ctg} t$. **54.** $3(x^2 + y) + xy^3 = cx$. **55.** $\mu = \frac{c}{(y^2 + x)^3}$.

56. $x = ce^{x/y}$. **57.** $x^2 + 2xy - y^2 - 6x - 2y = c$. **58.** $y = \frac{1}{1 + cx + \ln x}$ и $y = 0$.

59. $(x^2 - 1)y - \sin x = c$. **60.** $8y + 4x + 5 = ce^{4x-8y-4}$. **61.** $y^3 + x^3 - 3xy = c$.

62. $y = c(x^2 + y^2)$. **63.** $y^3 = x + c/x$. **64.** $y = c(x + a) + c^2$ и особое

решение $y = -\frac{(x+a)^2}{4}$. **65.** $x = \frac{2}{3}t + \frac{c}{t^2}$, $y = 2xt - t^2$ и $y = 0$, $y = \frac{3}{4}x^2$.

66. $y = \frac{c}{1 \pm \cos x}$.

К главе 2

1. $y = 5e^{3x} \sin x + 10$. **2.** $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{3} \cos 2t - \frac{t \cos t}{2}$. **3.** $(y - c_3)^2 = c_1 x + c_2$. **4.** $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2 \sin x}$. **5.** $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{3}$. **6.** $y =$

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{ch} x. \quad \mathbf{7.} \quad y = \frac{1}{c_1 x + c_2} + 1. \quad \mathbf{8.} \quad x = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + \frac{t^2 e^{2t}}{2} + e^t + \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{9.} \quad y = -\frac{x}{c_1} + \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2} \ln |1 + c_1 x| + c_2. \quad \mathbf{10.} \quad c_1 x^2 + 1 = c_1^2 (t + c_2)^2. \quad \mathbf{11.} \quad y = c_1 e^{2x} +$$

$$c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - x^2/16 + e^x/15. \quad \mathbf{12.} \quad y = \cos(x - c_1) + c_2 x + c_3. \quad \mathbf{13.} \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_5 x + c_6 - x^4/24. \quad \mathbf{14.} \quad x = e^t(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_3 + c_4 t) +$$

$$1 + t^2. \quad \mathbf{15.} \quad y = c_0 \left(1 - \frac{4x^3}{2 \cdot 3} + \frac{4^2 x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots + \frac{(-1)^k 4^k x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot 3k} + \dots \right) + c_1 \left(x - \frac{4x^4}{3 \cdot 4} + \frac{4^2 x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots + \frac{(-1)^k 4^k x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3k \cdot (3k+1)} + \dots \right).$$

$$\mathbf{16.} \quad y = c_1 J_{1/5}(3x) + c_2 J_{-1/5}(3x). \quad \mathbf{17.} \quad y = x. \quad \mathbf{18.} \quad y = (x/2 + 1)^4. \quad \mathbf{19.} \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1 + x \cos x - \sin x \ln |\sin x|. \quad \mathbf{20.} \quad u = c_1/r + c_2. \quad \mathbf{21.} \quad \text{Дифференциальное уравнение задачи}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{k}{r^2} \quad \text{или} \quad v \frac{dv}{dr} = \frac{k}{r^2}, \quad \text{где } r \text{ — расстояние от центра Земли до тела, } v \text{ — скорость, } k = -6400^2 g. \quad \text{Омв. } v \approx 11 \text{ км/сек.}$$

$$\mathbf{22.} \quad \text{Дифференциальное уравнение движения} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -g + k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad \text{Омв.}$$

$$x = \frac{75^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{g}{75} t. \quad \mathbf{23.} \quad \text{Дифференциальное уравнение движения} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = k(s+1)$$

$$\text{или} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{g}{6}(s+1). \quad \text{Омв. } t = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(6 + \sqrt{35}). \quad \mathbf{24.} \quad t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + \sqrt{80}). \quad \mathbf{25.} \quad s =$$

$$\frac{F-a}{b} t - \frac{(F-a)p}{b^2 g} \left(1 - e^{-(bg/p)t} \right). \quad \mathbf{26.} \quad x = A \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t. \quad \mathbf{27.} \quad x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t.$$

$$\mathbf{28.} \quad \text{Дифференциальное уравнение движения} \quad \ddot{x} + k_1 \dot{x} - k_2 x = 0, \quad k_2 > 0. \quad \text{Омв.}$$

$$x = c_1 e^{(-k_1/2 + \sqrt{k_1^2/4 + k_2})t} + c_2 e^{(-k_1/2 - \sqrt{k_1^2/4 + k_2})t}. \quad \mathbf{29.} \quad x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nt}{(n^2 - 2)n^3}.$$

$$\mathbf{30.} \quad y^2 = c_1 \left(x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \right) + c_2. \quad \mathbf{31.} \quad y = c_2 e^{c_1 x} + c_1,$$

$$y = \frac{4}{c-x}. \quad \mathbf{32.} \quad x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t - \frac{1}{12} t^2 \cos 3t + \frac{1}{36} \sin 3t. \quad \mathbf{33.} \quad y =$$

$$e^{-x} \left(c_1 + c_2 x - \frac{1}{4} x^2 \right) + \frac{1}{8} e^x. \quad \mathbf{34.} \quad y = c_1 e^x + e^{-x/2} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) +$$

$$\frac{1}{3} x e^x. \quad \mathbf{35.} \quad y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{x e^x \cos x}{4} + \frac{x^2 e^x \sin x}{4}. \quad \mathbf{36.} \quad y =$$

$$c_1 (x - x^3) + c_2 \left[4 - 6x^2 + 3(x^3 - x) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right] - \frac{1}{6}. \quad \mathbf{37.} \quad u = c_1 \ln(x^2 + y^2) + c_2.$$

$$\mathbf{38.} \quad u = \frac{c_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c_2. \quad \mathbf{39.} \quad \text{Дифференциальное уравнение движения}$$

$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$. Ответ. $x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}\left(1 - e^{-(k/m)t}\right)$. **40.** а) $t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x f(x) dx}}$, б) $x - x_0 = m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)}$; $t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)}$, где $v = \dot{x}$. **41.** $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + e^x(c_4 + c_5x + c_6x^2) - x^3/2 - x^4/24$. **42.** $x = (c_1 + c_2t) \cos t + (c_3 + c_4t) \sin t - \frac{1}{8}t^2 \cos t$. **43.** $y = c_1 \cos \ln(1+x) + c_2 \sin \ln(1+x) + \ln(1+x) \sin \ln(1+x)$. **44.** $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2) \sin nt - 2n \cos nt}{[(2-n^2)^2 + 4n^2]n^4}$. **45.** $x = \frac{\alpha_0}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-(n^2 - a_2)\alpha_n - a_1n\beta_n}{(n^2 - a_2)^2 + a_1^2n^2} \cos nt + \frac{a_1n\alpha_n - (n^2 - a_2)\beta_n}{(n^2 - a_2)^2 + a_1^2n^2} \sin nt \right]$, где $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$. **46.** $x = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{24} \mu(1 + 3 \cos 2t)$. **47.** $y = c_1x + c_2xe^{-1/x}$. **48.** $x^2y'' + xy' - y = 0$. **49.** $x = e^{(\sqrt{2}/2)t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-(\sqrt{2}/2)t} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + t^3$. **50.** $x = t^3 + t + 1$, $y = \frac{3}{8}t^6 + \frac{3}{10}t^5 + \frac{3}{16}t^4 + \left(c_1 + \frac{1}{6} \right) t^3 + c_1t + c_2$. **51.** $x = (c_1 + c_2t)e^{-5t} + \frac{2^t}{(5 + \ln 2)^2} + \frac{t^3e^{-5t}}{6}$. **52.** $y = c_2e^{c_1x^2}$. **53.** $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{x/2} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + e^{-x/2} \left(c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{e^{2x}}{63}$. **54.** $y = (c_1x + c_2) \cos x + (c_3x + c_4) \sin x + c_5 + c_6x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}e^x$. **55.** $y = (c_1x + c_2)^8 + c_3x + c_4$. **56.** $y = e^{1+c_1x} \left(\frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \right) + c_2$. **57.** $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{\sin 2x}{6} - \frac{\sin 4x}{30}$. **58.** $y = -\frac{1}{x-2}$. **59.** $y = c_2e^{c_1x} + \frac{1}{c_1}$.

К главе 3

1. $x = \sin t$, $y = \cos t$. **2.** $x_1 = 2e^t$, $x_2 = 2e^t$. **3.** $x = c_1e^{(-1+\sqrt{15})t} + c_2e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}$; y находим из первого уравнения: $y = e^t - \frac{dx}{dt} - 5x$. **4.** $x = c_1e^t + e^{-(1/2)t} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$; y и z определяются из уравнений: $y = \frac{dx}{dt}$, $z = \frac{d^2x}{dt^2}$. **5.** $x = c_1e^{c_2t}$; $y = c_1c_2e^{c_2t}$. **6.** $x =$

$c_1 \cos t + c_2 \sin t + 3$; $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$. **7.** $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$; $z = x[c_1 J'_0(x) + c_2 Y'_0(x)]$. **8.** $x + y + z = c_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2^2$. **9.** $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$; $y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t}$; $z = c_1 e^t - (c_2 + c_3)e^{-2t}$. **10.** $x = c_1 t + c_2/t$; $y = -c_1 t + c_2/t$. **11.** $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t \cos t + \sin t \ln |\sin t|$; y определяется из уравнения $y = dx/dt - 1$. **12.** $x^2 - y^2 = c_1$, $y - x - t = c_2$. **13.** $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \sin t$; $y = -c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. **14.** $x = e^t$; $y = 4e^t$. **15.** $\theta(1) \approx 0,047$. **16.** $x = e^{at}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$, $y = e^{at}(c_1 \sin t - c_2 \cos t)$. **17.** $x = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t}$, $y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t}$. **18.** $x = e^{-6t}(2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t)$, $y = e^{-6t}[(c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t]$. **19.** $x = c_1 e^t + c_2$, $y = (c_1 t + c_3)e^t - t - 1 - c_2$, $z = y - c_1 e^t$. **20.** $x + y + z = c_1$, $xyz = c_2$. **21.** $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$, $xyz = c_2$. **22.** $X = \left\| \begin{array}{c} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} \end{array} \right\|$.

К главе 4

1. Точка покоя асимптотически устойчива. **2.** Точка покоя неустойчива. **3.** При $\alpha < -\frac{1}{2}$ точка покоя асимптотически устойчива, при $\alpha = -\frac{1}{2}$ устойчива, при $\alpha > -\frac{1}{2}$ неустойчива. **4.** При $\alpha \leq 0$ точка покоя асимптотически устойчива, при $\alpha > 0$ неустойчива. **5.** При $1 < t < 2$ $x(t, \mu) \rightarrow \sqrt{4-t^2}$; при $2 < t < 3$ $x(t, \mu) \rightarrow -\sqrt{9-t^2}$; при $t > 3$ $x(t, \mu) \rightarrow \infty$. **6.** $x(t, \mu) \rightarrow \infty$. **7.** Точка покоя неустойчива. **8.** Точка покоя устойчива. **9.** Точка покоя неустойчива. **10.** Точка покоя устойчива. **11.** Седло. **12.** Периодическое решение $x = \frac{1}{5} \sin t - \frac{2}{5} \cos t$ асимптотически устойчиво. **13.** Все решения, в том числе и периодические, асимптотически устойчивы. **14.** Точка покоя неустойчива. Функция $v = x^4 - y^4$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева. **15.** Все решения неустойчивы. **16.** Решение $x \equiv 0$ неустойчиво. **17.** При $1 < \alpha < 2$ решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво. При $\alpha = 1$ и при $\alpha = 2$ решение $x \equiv 0$ устойчиво. При $\alpha > 2$ и при $\alpha < 1$ решение $x \equiv 0$ неустойчиво. **18.** Решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Функция $v = 4x^2 + 3y^2$ удовлетворяет условиям теоремы Малкина. **19.** Решение $X(t) \equiv 0$ неустойчиво. **20.** Все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет. **21.** Все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет. **22.** Периодическое решение $x = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$ неустойчиво. **23.** Область устойчивости $0 \leq \alpha \leq 1$, область асимптотической устойчивости $0 < \alpha < 1$. **24.** Область устойчивости $\alpha \geq 5$, область асимптотической устойчивости $\alpha > 5$.

К главе 5

1. $z = \Phi(x + y)$. 2. $z = e^{2x}\Phi(x - y)$. 3. $z = e^{y/x}\Phi(x)$. 4. $\Phi(z, ye^{x/z}) = 0$.
5. $z = 5 + \Phi(x^3y^5)/y^5$. 6. $u = \Phi(x - y, y - z)$. 7. $u = x^4\Phi(y/x^2, z/x^3)$.
8. $z = x\Phi_1(y) + \Phi_2(y)$. 9. $z = (x^2 + y - 1)^2$. 10. $z = ye^{(x-2)/y}$. 11. $z = 3x$.
12. $z = (y^2 - 2x/z)^{3/2}$. 13. $\Phi(z^2 + x^2, x^2 - y^2) = 0$. 14. $\Phi(z^2 - x^2, x^2 - y^2) = 0$. 15. Не интегрируется. 16. $2xy + y^2 + 6xz^2 = c$. 17. $z = ax^3 + y^3/(9a) + b$ (возможны и другие ответы). 18. $z = ax + by + a^3b^3$ (возможны и другие ответы). 19. $z = be^{(3/a)(a^2x+y)}$ (возможны и другие ответы). 20. $z = x \sin a + ay + b$ (возможны и другие ответы). 21. $x^2y - 3xyz = c$. 22. Такого семейства поверхностей нет, так как условие $(\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) = 0$ не выполнено. 23. Уравнение векторных линий $y/x = c_1$, $xz = c_2$. Уравнение векторных поверхностей $z = (1/x)\Phi(y/x)$. Уравнение поверхностей, ортогональных к векторным линиям $x^2 + y^2 - z^2 = c$. 24. $z = xy + 1$. 25. $z = 3xy$. 26. $z = x^2 + y^2$.
-

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. Г. Петровский. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, изд. 5-е. «Наука», 1964.
 - [2] И. Г. Малкин. *Теория устойчивости движения*. Гостехиздат, 1952. (к гл. 4).
 - [3] И. Г. Малкин. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*. Гостехиздат, 1956. (к § 8 [гл. 2 стр. 150]).
 - [4] А. Н. Тихонов. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. *Математический сборник*, 22(64):2, 1948. (к § 6 [гл. 4 стр. 239]).
 - [5] А. Н. Тихонов. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. *Математический сборник*, 31(72):3, 1952. (к § 6 [гл. 4 стр. 239]).
 - [6] В. В. Степанов. *Курс дифференциальных уравнений*, изд. 8-е. Физматгиз, 1959.
 - [7] А. Н. Крылов. *Лекции о приближенных вычислениях*, изд. 5-е. Гостехиздат, 1950. (к § 7 [гл. 1 стр. 58] и § 6 [гл. 3 стр. 206]).
 - [8] И. С. Березин и Н. П. Жидков. *Методы вычислений*, т. II. Физматгиз, 1960. (к § 7 [гл. 1 стр. 58] и § 6 [гл. 3 стр. 206]).
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

[Это сообщение будет удалено после завершения работы над предметным указателем]

Номера страниц, содержащих определение термина или понятия, подчеркнуты. Номера страниц, выделенные *курсивом*, указывают на примеры использования термина или понятия. Некоторые номера страниц одновременно подчеркнуты и выделены курсивом. В скобках после номера страницы указан номер упражнения, в котором данный термин или понятие встречается.

Аналитическая зависимость решения от параметра, теорема об, 52.

Аналитичность решения, теорема об, 141.

Асимптотически устойчивое решение, 212.

Бернулли уравнение, 26, 27.

Бесселя,

- уравнение, 143–146, 171(16).

- функции, 144–146.

Вариации постоянной метод, 24, 25–26, 71, 116–119, 120–121, 140.

Векторная,

- линия, 254.

- поверхность, 253.

Влияния функция, 124, 166–170.

Возврата точка, 79, 80.

Вронского определитель, 96, 97, 192.

Гамма-функция, 144.

Граничная задача, 8, 163.

Грина функция, 166–170.

Гурвица теорема, 236.

Дикритический узел, 219.

Динамическая система, 176.

Дифференциальное уравнение, 4.

- Бернулли, 26, 27.

- Бесселя, 143–146, 171(16).

- векторное, 4, 5–9, 164, 174.

- в полных дифференциалах, 28.

- второго порядка,

- - допускающее понижение порядка, 89–91.

- - линейное однородное, 105.

- в частных производных, 5.

- - первого порядка, 250–293.

- высшего порядка, 83–173.

- - понижение порядка, 85–91, 100–101, 102.

- интеграл, 15.

- интегрирование, 5.

- - с помощью дифференцирования, метод, 70.

- - с помощью рядов, 140–150, 171(15).

- Клеро, 71, 72, 275.

- Лагранжа, 70, 72, 76.

- линейное,

- - высшего порядка, 91–106, 113–125.

- - неоднородное с постоянными коэффициентами, 125–140.

- - однородное с постоянными коэффициентами, 106–110.

Дифференциальное уравнение (*продолжение*)

- линейное (*продолжение*)
- - первого порядка, 23, 25–26.
- - фундаментальная система решений, 99, 103, 173(48).
- не решенное относительно производной, 65.
- общее решение, 11, 84.
- общий интеграл, 15, 28.
- обыкновенное, 5.
- однородное, 21, 22.
- операторный метод решения, 131–140.
- особое решение, 54, 76, 77–80, 81(39), 82(42).
- периодические решения, 147–163, 172(29), 173(44, 45, 46).
- понижение порядка, 85–91, 100–101, 102.
- порядок, 5, *см. также* Дифференциальное уравнение, понижение порядка.
- приближенное интегрирование, *см.* Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений.
- приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными, 20–23.
- решение, 5, 175.
- - комплексное, 94, 107, 110, 115.
- Риккати, 27.
- с разделенными переменными, 14, 15–16.
- с разделяющимися переменными, 16, 17–23, 57, 86, 87.
- существования и единственности решения теорема, 35–58, 73–80, 83–85.
- Эйлера, 110–113, 140.

Дифференцируемость решений, теорема о, 53.

Закон движения, *см.* Уравнение движения.

Изоклины, 12–14, 81(35).

Интеграл,

- дифференциального уравнения, 15.
- криволинейный, 29, 30.
- первый, 87, 88, 185.
- полный, 273.

Интегральная,

- кривая, 11–14, 18, 81(35), 85, 176.
- - особая, 57, 76, 77–80.

- поверхность, 273, 280.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования, метод, 70.

Интегрируемая комбинация, 184.

Интегрируемость одним соотношением уравнений Пфаффа, 268.

Интегрирующий множитель, 31, 32–34, 35, 82(55), 106.

Итерация, *см.* Уравнение.

Квадратура, 15, 16.

Квазилинейное уравнение в частных производных, 252.

Клеро уравнение, 71, 72, 275.

Ковалевской теорема, 252.

Количество тепла, 19.

Коши,

- задача, 8.
- метод, 122, 123, 280.

Краевая задача, 8, 163.

Кратная точка, 72, 78, 80.

Лагранжа – Шарпи метод, 276.

Лагранжа уравнение, 70, 72, 76.

Линейная,

- зависимость, 94, 95–96, 192.
- система дифференциальных уравнений, 188–199.
- - с постоянными коэффициентами, 200–206.

Линейное дифференциальное уравнение, 23, 25–26.

- в частных производных,

- - неоднородное, 252.

- - однородное, 253.

- высшего порядка, 91–106, 113–125.

- с постоянными коэффициентами, 106–110, 125–140.

- фундаментальная система решений, 99, 103, 173(48).

Линейный дифференциальный оператор, 93, 114, 190.

Липшица условие, 37, 38, 43, 48, 57.

Ляпунова,

- второй метод, 223.
- теорема, 224, 226.
- функция, 224.

Малкина теорема, 245.

Малого параметра метод, 150–163, 173(46).

Метрическое пространство, 44, 46, 49.

Мильна метод, 59.

Мономолекулярные реакции, 18.

- Наложения принцип, 114, 196.
 Начальная задача, 8.
 Неподвижная точка, 45.
 Непрерывная зависимость решения от параметра и от начальных значений, теорема о, 51.
 Неустойчивое решение, 212.
 Неустойчивый,
 - предельный цикл, 235.
 - узел, 216, 219.
 - фокус, 218.
 Ньютона,
 - закон, 5.
 - интерполяционная формула, 60.
- Общее решение дифференциального уравнения, 11, 84.
 Общий интеграл дифференциального уравнения, 15.
 Обыкновенное дифференциальное уравнение, 5.
 Огибающая, 71, 72, 77–78, 79–80, 273–274, 279–280.
 Однородная функция, 92.
 - нулевой степени однородности, 21, 262.
 - p -й степени однородности, 265.
 Ома закон для цепи с самоиндукцией, 26.
 Оператор линейный дифференциальный, 93, 190.
 Операторный,
 - метод решения дифференциальных уравнений, 131–140.
 - многочлен, 132.
 Определитель Вронского, 96, 97, 192.
 Ортогональная траектория, 18, 19, 80(19, 22), 81(38), 82(44).
 Особая,
 - интегральная кривая, 57, 76, 77–80.
 - кривая, 54.
 - точка, 54, 55–56.
 Особое,
 - множество, 75.
 - решение дифференциального уравнения, 54, 57–58, 76, 77–80, 81(39), 82(42).
 Остроградского – Лиувилля формула, 105.
- p -дискриминантная кривая, 76, 77.
 Первого приближения система уравнений, 230.
 Первый,
 - интеграл, 87, 88, 185.
 - метод Якоби, 291.
 Периодические решения дифференциального уравнения, 8, 147–163, 172(29), 173(44, 45, 46).
 Периодичности условия, 162, 163.
 Период полураспада, 18.
 Покоя точка, 177, 213.
 Поле направлений, 11–12.
 Полная интегрируемость уравнений Пфаффа, 268.
 Полное пространство, 44, 46, 49.
 Полный,
 - дифференциал, 28, 29, 31.
 - интеграл, 273.
 Полуустойчивый предельный цикл, 235.
 Понижение порядка дифференциального уравнения, 85–91, 100–101, 102, 121–122, 145.
 Порядок дифференциального уравнения, 5, *см. также* Понижение порядка дифференциального уравнения.
 Последовательных приближений метод, 45, 50, 51, 58, 82(40), 207.
 Потеря частных решений, *см.* Частные решения, потеря.
 Появление лишних частных решений, *см.* Частные решения, появление лишних.
 Предельный цикл, 18, 235.
 - неустойчивый, 235.
 - полуустойчивый, 235.
 - устойчивый, 235.
 Приближенное интегрирование, *см. также* Последовательных приближений метод.
 - дифференциальных уравнений, 6, 7–8, 35–36, 58–64, 81(30, 31, 32, 40), 153–154, 173(46), 206–209.
 - систем дифференциальных уравнений, 206–209.
 Пространство,
 - метрическое, 44, 46, 49.
 - полное, 44, 46, 49.
 - равномерной сходимости, 46.
 - фазовое, 7, 176.
 Пуанкаре теорема, 52.
 Пуассона уравнение, 4.
 Пфаффа уравнение, 267.
 - интегрируемость одним соотношением, 268, 276.
 - полная интегрируемость, 268.

- Равномерной сходимости пространство, 46.
- Разложение решения в ряд по степеням малого параметра, метод, *см.* Малого параметра метод.
- Разложимость решения в обобщенный степенной ряд, теорема о, 141.
- «Размножения» процессы, 18.
- Расстояние, 44, 45, 46, 48.
- Резонанс, 149, 155–158.
- Риккати уравнение, 27.
- Рунге метод, 59, 61, 63–64, 209.
- Седло, 56, 216.
- Сжатых отображений принцип, 44, 46–50.
- Симметрическая форма записи, 187.
- Синусоидальное переменное напряжение, 26.
- Система,
- дифференциальных уравнений,
 - - приближенное интегрирование, *см.* Приближенное интегрирование систем дифференциальных уравнений.
- Система дифференциальных уравнений, 174–210.
- линейных, 188–199.
 - - с постоянными коэффициентами, 200–206.
 - решение, 175.
 - симметрическая форма записи, 187.
 - существования и единственности решения теорема, 48.
- Специальные решения, 264.
- Суперпозиции принцип, 114, 196.
- Существование и единственность периодического решения, теорема о, 161, 162.
- Существования и единственности решения теорема,
- дифференциальное уравнение, 35–58, 73–80, 83–85.
 - система дифференциальных уравнений, 48.
- Тейлора формула, 59, 60–61, 63, 64.
- Треугольника правило, 44, 46.
- Узел, 55.
- критический, 219.
 - неустойчивый, 216, 219.
 - устойчивый, 216, 219.
- Уравнение,
- в частных производных, 5.
 - - первого порядка, 250–293.
 - движения, 4, 5–6, 85, 86, 164, 171(21, 22, 23, 24), 172(25, 26, 27, 28, 39), 173(40), 174.
 - линий тока, 19.
 - математического маятника, 87.
 - радиоактивного распада, 4, 5, 17.
- Уравнивание, 58, 63.
- Устойчивое решение,
- по Ляпунову, 212.
 - по отношению к постоянно действующим возмущениям, 245.
- Устойчивый,
- предельный цикл, 235.
 - узел, 216, 219.
 - фокус, 217.
- Фазовая траектория, 7, 176.
- Фазовое пространство, 7, 176.
- Фокус, 56.
- неустойчивый, 218.
 - устойчивый, 217.
- Фундаментальная система решений, 99, 103, 173(48).
- Фурье ряд, 147, 148, 173(45).
- Характеристики, 255, 259, 265, 281, 282, 287.
- Характеристик метод, 280.
- Характеристическая полоса, 282, 287.
- Характеристическое уравнение, 106, 107, 112, 201.
- действительные корни, 106–109, 112, 128, 129, 140.
 - комплексные корни, 107, 110, 112, 129, 130–131.
- s -дискриминантная кривая, 78–79.
- Центр, 56, 218.
- Цикл предельный, 18, 235.
- Частные решения,
- потеря, 16, 17, 23, 71, 73, 88.
 - появление лишних, 16, 31, 88.
- Четаева теорема, 227.
- Шаг вычисления, 36.
- Штермера метод, 59–63, 64, 208.

- Эйлера,
 - дифференциальное уравнение, 110–113, 140.
 - ломаная, 8, 36, 39, 207.
 - метод, 36, 58, 61, 63, 207.
 - теорема об однородных функциях, 262.
 - формула, 110, 129.
 - Электрическая цепь с самоиндукцией, 26.
 - Эллиптическая функция, 87.
 - Якоби первый метод, 291.
-