§ 4. Існування та єдиність розв'язку задачі Гурса

Розглянемо найпростішу задачу з даними на характеристиках

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} &= F(x,t), \\ u(x,0) &= \varphi(x), \\ u(0,t) &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Додаткові умови даються на прямих $x = 0$ та $t = 0$, які, як було доведено вище, є характеристиками рівняння (4.1). Будемо вважати, що функції $\varphi(x)$ та $\psi(t)$ диференцюємі та задовольняють умові спряження $\varphi(0) = \psi(0)$. Інтегруючи послідовно по x та по t рівняння (4.1), отримуємо:

$$u_t(x,t) = u_t(0,t) + \int\limits_0^x F(\xi,t)\,d\xi,$$

$$u(x,t) = u(x,0) + u(0,t) - u(0,0) + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^x F(\xi,\eta)\,d\xi,$$

або

$$u(x,t) = \varphi(x) + \psi(t) - \varphi(0) + \iint\limits_{0\,0}^{t\,x} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{4.2}$$

Таким чином, для найпростішого рівняння, яке не містить перших похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ та шукаємої функції, розв'язок представляється у явному аналітичному вигляді (4.2). З формули (4.2) безпосередньо слідує єдиність та існування розв'язку поставленої задачі.

Перейдемо до розв'язку лінійного рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\,u + F(x,t) \tag{4.3}$$

при додаткових умовах на характеристиках $x = 0,\ t = 0$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u(0,t) &= \psi(t), \end{aligned} \tag{4.4}$$

де $\varphi(x)$ та $\psi(t)$ задовільнюють вимогам диференцюємості та спряження. Коефіцієнти a, b та c будемо вважати неперервними функціями x та t.

Формула (4.3) показує, що функція $u(x,t)$ задовільнює інтегро-диференційному рівнянню (4.5)

$$u(x,t) = \iint\limits_{0\,0}^{t\,x} \left[a(\xi,\eta)\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,u\right] d\xi\,d\eta$$
$$+ \varphi(x) + \psi(t) - \varphi(0) + \iint\limits_{0\,0}^{t\,x} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{4.5}$$

Для доведення існування та єдиності розв'язку рівняння (4.5) скористаємось методом послідовних наближень. Виберемо в якості нульового наближення функцію

$$u(x,t) = 0.$$

Тоді (4.5) дає для послідовних наближень слідуючі вирази:

$$\left.\begin{aligned}
&u_1(x,t) = \varphi(x) + \psi(t) - \varphi(0) + \int_0^t\!\!\int_0^x F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_n(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t\!\!\int_0^x \biggl[a(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi}\\
&\qquad\qquad + b(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,u_{n-1}\biggr]d\xi\,d\eta.
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Зауважимо, що

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^t \left[a(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x,\eta)\,u_{n-1}\right]d\eta,\\
\frac{\partial u_n}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + \int_0^x \left[a(\xi,t)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,t)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} + c(\xi,t)\,u_{n-1}\right]d\xi.
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Доведемо рівномірну збіжність послідовностей

$$\bigl\{u_n(x,t)\bigr\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)\right\}.$$

Для цього розглянемо різниці

$$\begin{aligned}
z_n(x,t) &= u_{n+1}(x,t) - u_n(x,t)\\
&= \int_0^t\!\!\int_0^x \left[a(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,z_{n-1}(\xi,\eta)\right]d\xi\,d\eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_n(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{n+1}(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\\
&= \int_0^t \left[a(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x,\eta)\,z_{n-1}(x,\eta)\right]d\eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_n(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_{n+1}(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\\
&= \int_0^x \left[a(\xi,t)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,t)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + c(\xi,t)\,z_{n-1}(\xi,t)\right]d\xi.
\end{aligned}$$

Нехай M — верхня межа абсолютних величин коефіцієнтів $a(x,t), b(x,t)$, та $c(x,t)$; H — верхня межа абсолютних величин $z_0 = u_1(x,t)$ та її похідних

$$|z_0| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial t}\right| < H$$

при зміні x та t всередині деякого квадрату $(0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le L)$. Побудуємо мажорантні оцінки для функцій z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ та $\frac{\partial z_n}{\partial t}$. Очевидно, що

$$|z_1| < 3HMxt < 3HM\frac{(x+t)^2}{2!},$$
$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3HMt < 3HM(x+t),$$
$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial t}\right| < 3HMx < 3HM(x+t).$$

Припустимо, що мають місце рекурентні оцінки

$$|z_n| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!},$$
$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+t)^n}{n!},$$
$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial t}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+t)^n}{n!},$$

де $K > 0$ — деяке стале число, значення якого наведемо нижче. Користуючись цими оцінками та формулою для $(n+1)$-го наближення, після деяких спрощінь, які посилюють нерівність, маємо:

$$\begin{aligned}|z_{n+1}| &< 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+t)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+t}{n+3}+2\right)\\ &< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+t)^{n+2}}{(n+2)!}\\ &< \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right| &< 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+t}{n+2}+2\right)\\ &< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &< \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial t}\right| &< 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+t}{n+2}+2\right)\\ &< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &< \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

де

$$K = L + 2.$$

В правих частинах цих нерівностей з точністю до множників пропорційності стоять загальні члени розкладання функції e^{2KLM}. Ці оцінки показують, що послідовності функцій

$$u_n = u_0 + z_1 + K + z_{n-1},$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + K + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial t} + K + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t}$$

збігаються рівномірно до граничних функцій, котрі ми зазначимо

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t),$$
$$v(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t),$$
$$w(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t).$$

Переходячи до границі під знаком інтегралу у формулах (4.6) та (4.7), будемо мати:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= u_1(x,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^x \Big[a(\xi,\eta)\,v + b(\xi,\eta)\,w + c(\xi,\eta)\,u\Big]d\xi\,d\eta,\\ v(x,t) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t) + \int\limits_0^t \Big[a(x,\eta)\,v + b(x,\eta)\,w + c(x,\eta)\,u\Big]d\eta,\\ v(x,t) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) + \int\limits_0^x \Big[a(\xi,t)\,v + b(\xi,t)\,w + c(\xi,t)\,u\Big]d\xi. \end{aligned}\right\}$$

Звідси випливають рівності

$$v = \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial u}{\partial t},$$

які дозволяють встановити, що функція $u(x,t)$ задовільнює інтегро-диференційному рівнянню

$$\begin{aligned} u(x,t) = \varphi(x) + \psi(t) - \varphi(0) &+ \int\limits_0^t\int\limits_0^x F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_0^x \Big[a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,u\Big]d\xi\,d\eta, \end{aligned} \tag{4.5$*$}$$

а також диференційному рівнянню (4.3), що перевіряється безпосереднім диференціюванням рівняння (4.5$*$) по x та по t. Функція $\bar{u} = u(x,t)$ задовільнює також додатковим умовам.

Доведемо тепер єдиність розв'язку задачі (4.3)–(4.4). Припустимо існування двох розв'язків $u_1(x,t)$ та $u_2(x,t)$. Отримуємо для їх різниці

$$U(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

однорідне інтегро-диференційне рівняння

$$U(x,t) = \int_0^t\int_0^x \left(a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial t} + cU\right) d\xi\, d\eta.$$

Позначаючи далі через H_1 верхню межу абсолютних величин

$$|U(x,t)| < H_1, \quad \left|\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)\right| < H_1, \quad \left|\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right| < H_1$$

для $0 \le x \le L$, $0 \le t \le L$ та повторюючи оцінки, які було проведено для функцій $z_n(x,t)$, переконуємось у справедливості нерівності

$$|U| < 3H_1M^{n+1}K^n\frac{(x+t)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

для будь-якого значення n. Звідси і випливає

$$U(x,t) \equiv 0 \quad \text{або} \quad u_1(x,t) \equiv u_2(x,t),$$

що і доводить єдиність розв'язку задачі Гурса.

Власне українські слова	Іншомовні слова
перекóнуватися	характерúстика [*гр.* $\chi\alpha\rho\alpha\kappa\tau\eta\rho\iota\varsigma\tau\iota\kappa o\zeta$ характéрний, від $\chi\alpha\rho\alpha\kappa\tau\acute{\eta}\rho$ ознáка, особлúвість]
містúти	аналітúчний [*гр.* $\alpha\nu\alpha\lambda\upsilon\tau\iota\kappa o\zeta$]
шукáти	гіпéрбола [< *гр.* $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$ прохóджу чéрез щось]
існувáння	інтегрáл [< *лат.* **integer** цíлий]
вимóга	коефіцієнт [< *лат.* **coefficiens (coefficientis)** якúй спрúяє]
якість	нуль [< *лат.* **nullus** нíякий]
межá	абсолю́тний [*лат.* **absolutus**]
загáльний	квадрáт [< *лат.* **quadratus** чотирикýтний]
звíдси	рекурéнтний [< *лат.* **recurrens (recurrentis)** якúй повертáється]
умóва	мажорáнта [< *фр.* **majorante**, від **majorer** оголóшувати велúким]

Табл. 1.