Кацитадзе О., 201-И

§ 5. Сопряженные дифференциальные операторы

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор 2-го порядка

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu$$

где A_{ij}, B_i и C являются дважды дифференцируемыми функциями $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Назовем оператор

$$Mv \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv$$

сопряженным с оператором Lu.

Если оператор L совпадает с сопряженным ему оператором M, то такой оператор называют самосопряженным.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
vLu - uMv = {} & v\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu\right) \\
& - u\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + v\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cvu \\
&\quad - u\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j} + u\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} - Cuv \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(vA_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \frac{\partial (vA_{ij})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial (vA_{ij})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left(vB_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right] + B_i uv\right\}.$$

При получении этого выражения мы добавили сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right),$$

но она равна нулю, так что значение выражения не изменилось.

Выражение $vLu - uMv$ представляет собой сумму частичных производных по x_i от некоторых выражений P_i, то есть

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

где

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \left(vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right) + B_i uv.$$

Рассмотрим теперь некоторый n-мерный объем Ω, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью S.

Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса (3.2), будем иметь

$$\iint\limits_{\Omega} \cdots \int (vLu - uMv)\, dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n = -\iint\limits_{S} \cdots \int \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(nx_i)\, dS, \qquad (5.1)$$

где $\cos(nx_1)$, $\cos(nx_2)$, $\ldots$, $\cos(nx_n)$ — направляющие косинусы внутренней нормали к S.

Формула (5.1) носит название формулы Грина.

Рассмотрим уравнение (1.1). Операторы Lu, Mv, а также функции P_1 и P_2 будут иметь вид:

$$\begin{aligned} Lu &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu, \\ Mu &\equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial t} + cv, \\ P_1 &= \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t} \right) + auv, \\ P_2 &= \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right) + buv. \end{aligned}$$

При этом формула Грина дает (нормаль внутренняя)

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\, dx\, dt = -\int\limits_{S} \Big\{ &\left[\tfrac{1}{2} \left(v\tfrac{\partial u}{\partial t} - u\tfrac{\partial v}{\partial t} \right) + auv \right] \cos(nx) \\ &+ \left[\tfrac{1}{2} \left(v\tfrac{\partial u}{\partial x} - u\tfrac{\partial v}{\partial x} \right) + buv \right] \cos(nt) \Big\} dS. \qquad (5.2) \end{aligned}$$

§ 6. Построение решения

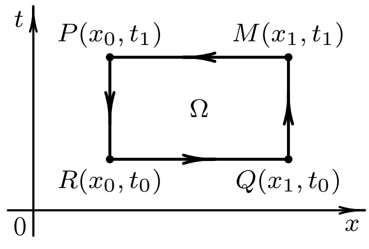

Рис. 2.

Строить решение будем методом Римана, который заключается в использовании формулы Грина и дает решение задачи (1.1) через граничные условия (1.2).

Пусть нам нужно найти значение функции u в некоторой точке M области $(x > x_0,\ \ t > t_0)$ с координатами (x_1, t_1).

Проведем через точку M (рис. 2) с координатами (x_1, t_1) две прямые, параллельные координатным осям. Пусть точка $P(x_0, t_1)$ — это точка пересечения прямых $x = x_0$ и $t = t_1$, а точка $Q(x_1, t_0)$ — точка пересечения прямых $x = x_1$ и $t = t_0$. Прямые $x = x_0$, $x = x_1,\ t = t_0,\ t = t_1$, как было показано раньше, являются характеристиками уравнения (1.1). Область Ω будет представлять собой прямоугольник $MPRQ$. В этой области мы можем применить метод Римана для нахождения решения.

Если учесть, что обход области Ω происходит против часовой стрелки, так что площадь обхода всегда остается слева, формулу (5.2) можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\,dx\,dt = \int\limits_{S} \left[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\right]dx - \left[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial t}\Big) - auv\right]dt. \quad (5.2*)$$

Из рис. 2 видим, что при этом

$$\begin{aligned} dx &= \cos(nt)\,dS, \\ dt &= -\cos(nx)\,dS. \end{aligned}$$

При условии $u(x_0, t) = \varphi(t)$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=x_0} = \varphi'(t).$$

При условии $u(x, t_0) = \psi(x)$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=t_0} = \psi'(x).$$

Если применить формулу (5.2∗) к прямоугольнику $MPRQ$, учитывая, что на характеристиках QM и PR изменяется только t, а на характеристиках MP и RQ изменяется только x, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\,dx\,dt \\ &= \int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\right]dx + \int\limits_{Q}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\right]dt \\ &\quad + \int\limits_{P}^{R} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\right]dt + \int\limits_{R}^{Q} \left[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\right]dx. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Преобразуем каждый из интегралов, стоящих в правой части (6.1):

$$\int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\right]dx = \int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} - 2u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\right]dx$$

$$= \tfrac{1}{2} uv\Big|_P^M + \int\limits_P^M u\Big(bv - \frac{\partial v}{\partial x}\Big) dx \tag{6.2.1}$$

$$\int\limits_Q^M \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big] dt = \int\limits_Q^M \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t} - 2u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big] dt$$

$$= \tfrac{1}{2} uv\Big|_Q^M + \int\limits_Q^M u\Big(av - \frac{\partial v}{\partial t}\Big) dt \tag{6.2.2}$$

$$\int\limits_P^R \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big] dt = \int\limits_P^R \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t} - 2u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big] dt$$

$$= \tfrac{1}{2} uv\Big|_P^R + \int\limits_P^R u\Big(av - \frac{\partial v}{\partial t}\Big) dt \tag{6.2.3}$$

$$\int\limits_R^Q \Big[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\Big] dt = \int\limits_R^Q \Big[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\Big] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} uv\Big|_R^Q - \int\limits_R^Q v\Big(bu + \frac{\partial u}{\partial x}\Big) dx \tag{6.2.4}$$

Пусть теперь $v(x, t, x_1, t_1)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} Mv &= 0, \\ v(x_1, t, x_1, t_1) &= e^{-\int_t^{t_1} a(x_1,t)\,dt}, \\ v(x, t_1, x_1, t_1) &= e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dt}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

При этом

$$\begin{aligned} v(x_1, t_1, x_1, t_1) &= 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{x=x_1} &= a(x_1,t)\cdot e^{-\int_t^{t_1} a(x_1,t)\,dt} = a(x_1,t)\, v(x_1,t,x_1,t_1), \\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{t=t_1} &= b(x,t_1)\cdot e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dx} = b(x,t_1)\, v(x,t_1,x_1,t_1). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Решение $v(x, t, x_1, t_1)$ однородного сопряженного уравнения (6.3), удовлетворяющее условиям (6.4), называется функцией Римана. Эта функция не зависит от начальных данных (1.2), и для нее точка (x, t) играет роль аргумента, а точка (x_1, t_1) — роль параметра. Существование и единственность такой функции v были доказаны методом последовательных приближений.

Поскольку на прямой MP $t = t_1$, а на прямой QM $x = x_1$, то последние члены в формулах (6.2.1) и (6.2.2) обращаются в ноль, и мы получаем:

$$\int\limits_P^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right] dx = \tfrac{1}{2}uv\Big|_P^M,$$

$$\int\limits_Q^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right) + auv\right] dt = \tfrac{1}{2}uv\Big|_Q^M.$$

Формулу (6.1) теперь можно записать в виде:

$$\iint\limits_\Omega vLu\,dx\,dt = \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_M - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_Q + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_M - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_P + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_R - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_P$$
$$+ \int\limits_P^R u\left(av - \frac{\partial v}{\partial t}\right) dt + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_Q - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_R - \int\limits_R^Q v\left(bu + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

Приводя подобные и учитывая, что

$$v(x_1, t_1, x_1, t_1) = 1, \quad u(x_0, t) = \varphi(t), \quad u(x, t_0) = \psi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=t_0} = \psi'(x),$$

имеем:

$$\iint\limits_\Omega vLu\,dx\,dt = u\Big|_M - \varphi(t_1)\cdot e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dx}$$
$$+ \int\limits_P^R \varphi(t)\left(av - \frac{\partial v}{\partial t}\right) dt - \int\limits_R^Q v\big(b\psi(x) + \psi'(x)\big) dx.$$

Откуда находим решение нашей задачи

$$u(M) = \iint\limits_\Omega vF(x,t)\,dx\,dt + \varphi(t_1)\cdot e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dx}$$
$$+ \int\limits_P^R \varphi(t)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - av\right) dt + \int\limits_R^Q v\big(b\psi(x) + \psi'(x)\big) dx. \quad (6.5)$$

Как мы видим, формула (6.5) позволяет в явном виде записать решение данной задачи, поскольку точку $M(x_1, t_1)$ мы выбрали произвольно.