Кацитадзе О., 201-И

§ 5. Спряжені диференційні оператори

Розглянемо лінійний диференційний оператор 2-го порядку

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu$$

де A_{ij}, B_i и C є двічі диференцюємими функціями $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Назвем оператор

$$Mv \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv$$

спряженим з оператором Lu.

Якщо оператор L співпадає з спряженим йому оператором M, то такий оператор називають самоспряженим.

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} vLu - uMv = v&\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu\right) \\ &- u\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= v\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + v\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cvu \\ &\quad - u\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j} + u\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} - Cuv \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(vA_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \frac{\partial (vA_{ij})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial (vA_{ij})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left(vB_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right] + B_i uv\right\}.$$

При отриманні цього виразу ми додали суму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right),$$

але вона дорівнює нулю, так що значення виразу не змінилося.

Одже, вираз $vLu - uMv$ являє собою суму частинних похідних по x_i від деяких виразів P_i, тобто

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

де

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \left(vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right) + B_i uv.$$

Розглянемо тепер деякий n-мірний об'єм Ω, який обмежений кусочно-гладкою поверхнею S.

Користуючись формулою Остроградського-Гауса (3.2), будемо мати

$$\iint\limits_{\Omega} \cdots \int (vLu - uMv)\, dx_1\, dx_2 \, \ldots \, dx_n = - \iint\limits_{S} \cdots \int \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(nx_i)\, dS, \tag{5.1}$$

де $\cos(nx_1), \cos(nx_2), \ldots, \cos(nx_n)$ — направляючі косінуси внутрешньої нормалі до S.

Формула (5.1) носить назву формули Гріна.

Розглянемо рівняння (1.1). Оператори Lu, Mv, а також функції P_1 та P_2 будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}
Lu &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu, \\
Mu &\equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial t} + cv, \\
P_1 &= \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t} \right) + auv, \\
P_2 &= \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right) + buv.
\end{aligned}$$

При цьому формула Гріна дає (нормаль внутрішня)

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\, dx\, dt = - \int\limits_{S} \left\{ \left[\tfrac{1}{2}\left(v\tfrac{\partial u}{\partial t} - u\tfrac{\partial v}{\partial t} \right) + auv \right] \cos(nx) \right.$$
$$\left. + \left[\tfrac{1}{2}\left(v\tfrac{\partial u}{\partial x} - u\tfrac{\partial v}{\partial x} \right) + buv \right] \cos(nt) \right\} dS. \tag{5.2}$$

§ 6. Побудова розв'язку

Будувати розв'язок будемо методом Рімана, який полягає на використовуванні формули Гріна та дає рішення задачі (1.1) через граничні умови (1.2).

Нехай нам потрібно знайти значення функції u у деякій точці M області $(x > x_0,\ \ t > t_0)$ з координатами (x_1, t_1).

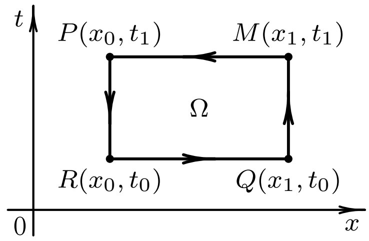

Рис. 2.

Проведемо через точку M (рис. 2) з координатами (x_1, t_1) дві прямі, які паралельні координатним осям. Нехай точка $P(x_0, t_1)$ — це точка перетину прямих $x = x_0$ та $t = t_1$, а точка $Q(x_1, t_0)$ — точка перетину прямих $x = x_1$ та $t = t_0$. Прямі $x = x_0,\ x = x_1,$ $t = t_0,\ t = t_1$, як було показано раніше, є характеристиками рівняння (1.1). Область Ω буде являти собою прямокутник $MPRQ$. У цій області ми можемо застосувати методу Рімана для знаходження розв'язку.

Якщо враховувати, що обіг області Ω відбувається проти годинникової стрілки, так що обігаєма площа завжди залишається зліва, формулу (5.2) можна записати у вигляді

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\,dx\,dt = \int\limits_{S} \left[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\right]dx \\ - \left[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial t}\Big) - auv\right]dt. \quad (5.2*)$$

З рис. 2 бачимо, що при цьому

$$\begin{aligned} dx &= \cos(nt)\,dS, \\ dt &= -\cos(nx)\,dS. \end{aligned}$$

За умови $u(x_0, t) = \varphi(t)$ отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=x_0} = \varphi'(t).$$

За умови $u(x, t_0) = \psi(x)$ отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=t_0} = \psi'(x).$$

Якщо застосувати формулу (5.2∗) до прямокутника $MPRQ$, враховуючи, що на характеристиках QM та PR змінюється лише t, а на характеристиках MP та RQ змінюється лише x, будемо мати:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\,dx\,dt \\ &= \int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\right]dx + \int\limits_{Q}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\right]dt \\ &+ \int\limits_{P}^{R} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\right]dt + \int\limits_{R}^{Q} \left[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\right]dx. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Перетворимо кожен з інтегралів, який стоїть у правій частині (6.1):

$$\begin{aligned} \int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\right]dx &= \int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} - 2u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\right]dx \\ &= \tfrac{1}{2}uv\Big|_{P}^{M} + \int\limits_{P}^{M} u\Big(bv - \frac{\partial v}{\partial x}\Big)dx \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

$$\int\limits_Q^M \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big]dt = \int\limits_Q^M \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t} - 2u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big]dt$$

$$= \tfrac{1}{2}uv\Big|_Q^M + \int\limits_Q^M u\Big(av - \frac{\partial v}{\partial t}\Big)dt \qquad (6.2.2)$$

$$\int\limits_P^R \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big]dt = \int\limits_P^R \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t} - 2u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big]dt$$

$$= \tfrac{1}{2}uv\Big|_P^R + \int\limits_P^R u\Big(av - \frac{\partial v}{\partial t}\Big)dt \qquad (6.2.3)$$

$$\int\limits_R^Q \Big[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\Big]dt = \int\limits_R^Q \Big[\frac{1}{2}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - buv\Big]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}uv\Big|_R^Q - \int\limits_R^Q v\Big(bu + \frac{\partial u}{\partial x}\Big)dx \qquad (6.2.4)$$

Нехай тепер $v(x,t,x_1,t_1)$ — деяка функція, яка задовільнює умовам:

$$\begin{gathered} Mv = 0, \\ v(x_1,t,x_1,t_1) = e^{-\int_t^{t_1} a(x_1,t)\,dt}, \\ v(x,t_1,x_1,t_1) = e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dt}. \end{gathered} \qquad (6.3)$$

При цьому

$$v(x_1,t_1,x_1,t_1) = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{x=x_1} &= a(x_1,t)\cdot e^{-\int_t^{t_1} a(x_1,t)\,dt} = a(x_1,t)\,v(x_1,t,x_1,t_1), \\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{t=t_1} &= b(x,t_1)\cdot e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dx} = b(x,t_1)\,v(x,t_1,x_1,t_1). \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Розв'язок $v(x,t,x_1,t_1)$ однорідного спряженого рівняння (6.3), який задовільнює умовам (6.4), називається функцією Рімана. Ця функція не залежить від початкових даних (1.2), та для неї точка (x,t) грає роль аргументу, а точка (x_1,t_1) — роль параметру. Існування та єдиність такої функції v було доказано методом послідовних наближень.

Оскільки на прямій MP $t = t_1$, а на прямій QM $x = x_1$, то останні члени у формулах (6.2.1) та (6.2.2) обертаються в нуль, і ми отримаємо:

$$\int\limits_P^M \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\Big]dx = \tfrac{1}{2}uv\Big|_P^M,$$

$$\int\limits_Q^M \Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\Big) + auv\Big]dt = \tfrac{1}{2}uv\Big|_Q^M.$$

Формулу (6.1) тепер можна записати у вигляді:

$$\iint\limits_{\Omega} vLu\,dx\,dt = \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_M - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_Q + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_M - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_P + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_R - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_P$$

$$+ \int\limits_P^R u\left(av - \frac{\partial v}{\partial t}\right)dt + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_Q - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_R - \int\limits_R^Q v\left(bu + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

Приводячи подібні та враховуючи, що

$$v(x_1, t_1, x_1, t_1) = 1, \quad u(x_0, t) = \varphi(t), \quad u(x, t_0) = \psi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=t_0} = \psi'(x),$$

маємо:

$$\iint\limits_{\Omega} vLu\,dx\,dt = u\Big|_M - \varphi(t_1)\cdot e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dx}$$

$$+ \int\limits_P^R \varphi(t)\left(av - \frac{\partial v}{\partial t}\right)dt - \int\limits_R^Q v\big(b\psi(x) + \psi'(x)\big)dx.$$

Звідки знаходимо розв'язок нашої задачі

$$u(M) = \iint\limits_{\Omega} vF(x,t)\,dx\,dt + \varphi(t_1)\cdot e^{-\int_x^{x_1} b(x,t_1)\,dx}$$

$$+ \int\limits_P^R \varphi(t)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - av\right)dt + \int\limits_R^Q v\big(b\psi(x) + \psi'(x)\big)dx. \quad (6.5)$$

Як ми бачимо, формула (6.5) дозволяє у явному вигляді написати розв'язок данної задачі, оскільки точку $M(x_1, t_1)$ ми вибрали довільно.

Власне українські слова	Іншомовні слова
перéтин	ікосáедр [*гр.* *ϵίκοςαϵδρον*, від *ϵίκοςι* двáдцять
застосóвувати	+ *έδρα* оснóва, грань]
врахóвувати	мéтод [*гр.* *μϵθοδος*]
дéякий	парáметр [< *гр.* *παραμϵτρον* якúй відмíряє]
отрúмувати	лінíйний [< *лат.* **linea** лíнія]
нехáй	диференціáл [< *лат.* **differentia** різнúця]
обмéжений	оперáтор [< *лат.* **operator** дíючий]
мáти	фýнкція [< *лат.* **functio** вúконáння]
будувáти	сýма [*лат.* **summa**]
умóва	фóрмула [< *лат.* **formula** фóрма, прáвило]
	кóсінус [*лат.* **co(n)** с, спíльно + **sinus** кривинá]

Табл. 1.