Кацитадзе Г., 201-И

§ 4. Существование и единственность решения задачи Гурса

Рассмотрим простейшую задачу с данными на характеристиках

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} &= F(x,t),\\ u(x,0) &= \varphi(x),\\ u(0,t) &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Дополнительные условия задаются на прямых $x = 0$ и $t = 0$, которые, как было доказано выше, являются характеристиками уравнения (4.1). Будем считать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям сопряжения $\varphi(0) = \psi(0)$. Интегрируя последовательно по x и по t уравнения (4.1), получаем:

$$u_t(x,t) = u_t(0,t) + \int\limits_0^x F(\xi,t)\,d\xi,$$

$$u(x,t) = u(x,0) + u(0,t) - u(0,0) + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^x F(\xi,\eta)\,d\xi,$$

или

$$u(x,t) = \varphi(x) + \psi(t) - \varphi(0) + \iint\limits_{0\,0}^{t\,x} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{4.2}$$

Таким образом, для простейшего уравнения, не содержащего первых производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и искомой функции, решение представляется в явном аналитическом виде (4.2). Из формулы (4.2) непосредственно следует единственность и существование решения поставленной задачи.

Перейдем к решению линейного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\,u + F(x,t) \tag{4.3}$$

при дополнительных условиях на характеристиках $x = 0,\ t = 0$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x),\\ u(0,t) &= \psi(t), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют требованиям дифференцируемости и сопряжения. Коэффициенты a, b и c будем считать непрерывными функциями x и t.

Формула (4.3) показывает, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет интегрально-дифференциальному уравнению (4.5)

$$u(x,t) = \iint\limits_{0\,0}^{t\,x} \left[a(\xi,\eta)\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,u\right] d\xi\,d\eta$$

$$+ \varphi(x) + \psi(t) - \varphi(0) + \iint\limits_{0\,0}^{t\,x} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{4.5}$$

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (4.5) воспользуемся методом последовательных приближений. Выберем в качестве нулевого приближения функцию

$$u(x,t)=0.$$

Тогда (4.5) дает для последовательных приближений следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \varphi(x)+\psi(t)-\varphi(0)+\int\limits_0^t\int\limits_0^x F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n(x,t) &= u_1(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^x\Big[a(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\xi}\\
&\qquad +b(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\eta}+c(\xi,\eta)\,u_{n-1}\Big]d\xi\,d\eta.
\end{aligned}\right\}\tag{4.6}$$

Заметим, что

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}+\int\limits_0^t\Big[a(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\eta}+c(x,\eta)\,u_{n-1}\Big]d\eta,\\
\frac{\partial u_n}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t}+\int\limits_0^x\Big[a(\xi,t)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\xi}+b(\xi,t)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}+c(\xi,t)\,u_{n-1}\Big]d\xi.
\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\big\{u_n(x,t)\big\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)\right\}.$$

Для этого рассмотрим разности

$$\begin{aligned}
z_n(x,t) &= u_{n+1}(x,t)-u_n(x,t)\\
&= \int\limits_0^t\int\limits_0^x\Big[a(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\eta}+c(\xi,\eta)\,z_{n-1}(\xi,\eta)\Big]d\xi\,d\eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_n(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{n+1}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\\
&= \int\limits_0^t\Big[a(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}+b(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\eta}+c(x,\eta)\,z_{n-1}(x,\eta)\Big]d\eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_n(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_{n+1}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\\
&= \int\limits_0^x\Big[a(\xi,t)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\xi}+b(\xi,t)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial t}+c(\xi,t)\,z_{n-1}(\xi,t)\Big]d\xi.
\end{aligned}$$

Пусть M — верхняя граница абсолютных величин коэффициентов $a(x,t)$, $b(x,t)$, и $c(x,t)$; H — верхняя граница абсолютных величин $z_0 = u_1(x,t)$ и ее производных

$$|z_0| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial t}\right| < H$$

при изменении x и t внутри некоторого квадрата $(0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le L)$. Построим мажорантные оценки для функций z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial z_n}{\partial t}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |z_1| &< 3HMxt < 3HM\frac{(x+t)^2}{2!}, \\ \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| &< \ 3HMt \ < 3HM(x+t), \\ \left|\frac{\partial z_1}{\partial t}\right| &< \ 3HMx \ < 3HM(x+t). \end{aligned}$$

Допустим, что имеют место рекуррентные оценки

$$\begin{aligned} |z_n| &< 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}, \\ \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| &< 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+t)^n}{n!}, \\ \left|\frac{\partial z_n}{\partial t}\right| &< 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+t)^n}{n!}, \end{aligned}$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная, значение которой приведем ниже. Пользуясь этими оценками и формулой для $(n+1)$-го приближения, после некоторых упрощений, усиливающих неравенство, имеем:

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &< 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+t)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+t}{n+3}+2\right) \\ &< 3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+t)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &< \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right| &< 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+t}{n+2}+2\right) \\ &< 3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &< \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial t}\right| &< 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+t}{n+2}+2\right) \\ &< 3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &< \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

где

$$K = L + 2.$$

В правых частях этих неравенств с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения функции e^{2KLM}. Эти оценки показывают, что последовательности функций

$$u_n = u_0 + z_1 + K + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + K + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial t} + K + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t}$$

сходятся равномерно к граничным функциям, которые мы обозначим

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t),$$

$$v(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t),$$

$$w(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t).$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в формулах (4.6) и (4.7), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1(x,t) + \int_0^t\!\!\int_0^x \Big[a(\xi,\eta)\,v + b(\xi,\eta)\,w + c(\xi,\eta)\,u\Big]d\xi\,d\eta,\\
v(x,t) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t) + \int_0^t \Big[a(x,\eta)\,v + b(x,\eta)\,w + c(x,\eta)\,u\Big]d\eta,\\
v(x,t) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) + \int_0^x \Big[a(\xi,t)\,v + b(\xi,t)\,w + c(\xi,t)\,u\Big]d\xi.
\end{aligned}\right\}$$

Отсюда вытекают равенства

$$v = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial u}{\partial t},$$

которые позволяют установить, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет интегрально-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}
u(x,t) = \varphi(x) + \psi(t) - \varphi(0) + \int_0^t\!\!\int_0^x F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\
+ \int_0^t\!\!\int_0^x \Big[a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,u\Big]d\xi\,d\eta, \qquad (4.5*)
\end{aligned}$$

а также дифференциальному уравнению (4.3), что проверяется непосредственным дифференцированием уравнения (4.5$*$) по x и по t. Функция $\bar{u} = u(x,t)$ удовлетворяет также дополнительным условиям.

Докажем теперь единственность решения задачи (4.3)–(4.4). Допустим существование двух решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Получим для их разности

$$U(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

однородное интегрально-дифференциальное уравнение

$$U(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^x \left(a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial t} + cU \right) d\xi\, d\eta.$$

Обозначая далее через H_1 верхнюю границу абсолютных величин

$$|U(x,t)| < H_1, \quad \left|\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)\right| < H_1, \quad \left|\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right| < H_1$$

для $0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le L$ и повторяя оценки, проведенные для функций $z_n(x,t)$, убедимся в справедливости неравенства

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+t)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

для любого значения n. Отсюда и вытекает

$$U(x,t) \equiv 0 \quad \text{или} \quad u_1(x,t) \equiv u_2(x,t),$$

что и доказывает единственность решения задачи Гурса.