Алгоритм построения растрового изображения окружности (Х. Харденбург)

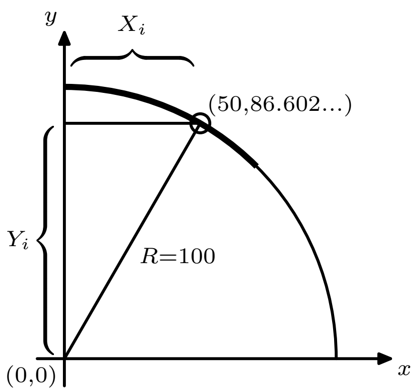


Рис. 1.

1. Цель алгоритма — получить последовательность пар координат (x_i, y_i) растрового изображения окружности радиуса R. Вычисления проведем для $1/8$ части окружности (см. Рис. 1, выделенная жирной линией дуга); семь других частей симметричны относительно либо центра окружности, либо ее диаметров. Будем считать, что центр окружности находится в точке $(0, 0)$.

2. Основная идея. С каждым шагом при увеличении длины основной оси X_i на один пиксель мы рассчитываем соответствующую длину неосновной оси Y_i по формуле

$$Y_i = \sqrt{R^2 - X_i^2}. \tag{1}$$

При этом координата x_i всегда будет равна длине основной оси X_i. Начальная координата $y_0 = Y_0 = R$, а как только рассчитанная длина неосновной оси Y_i становится меньше некоторого порогового значения, мы смещаемся на один пиксель по неосновной оси, т.е. уменьшаем y_i на единицу.

3. Начальные значения координат, длин основной и неосновной осей и порога:

$$\begin{aligned} x_0 &= X_0 = 0, \\ y_0 &= Y_0 = \sqrt{R^2 - X_0^2} = R, \\ T_0 &= R - 0.5\,. \end{aligned} \tag{2}$$

При смещении на один пиксель по неосновной оси значение порога должно быть уменьшено на единицу.

4. Оптимизация вычислений. Во избежание вычислений с плавающей точкой вместо величины (1) будем пересчитывать величину $Y_i^2 = R^2 - X_i^2$; аналогично поступим со значением порога (2). Тогда

$$\begin{aligned} Y_0^2 &= R^2 - X_0^2 = R^2, \\ T_0^2 &= [R^2 - R + 0.25] = R^2 - R. \end{aligned} \tag{3}$$

(В формуле (3) мы отбросили дробную часть, составляющую 0.25. Это будет учитываться ниже при сравнении длины неосновной оси со значением порога T_i.)

При переходе на один пиксель по основной оси

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= X_{i+1} = X_i + 1, \\ \Delta(Y_{i+1}^2) &= Y_{i+1}^2 - Y_i^2 = (R^2 - X_{i+1}^2) - (R^2 - X_i^2) = \\ &= -(2X_i + 1) = -(2X_{i+1} - 1), \\ Y_{i+1}^2 &= Y_i^2 + \Delta(Y_{i+1}^2). \end{aligned}$$

Для определения момента, когда нужно двигаться по неосновной оси, необходимо сравнить новое значение Y_{i+1} с текущим значением порога T_i. При точном значении порога T_i проверка выглядит как «$Y_{i+1}^2 < T_i^2$». Так как при расчете T_i^2 мы учитываем только целую часть точного значения (см. формулу (3)), а Y_i^2 всегда целое, то соответствующая проверка принимает вид «$Y_{i+1}^2 \le T_i^2$».

Итак, если $Y_{i+1}^2 \le T_i^2$, то необходимо сделать шаг по неосновной оси, т.е.

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i - 1,\\
\Delta(T_{i+1}^2) &= T_{i+1}^2 - T_i^2 = (T_i - 1)^2 - T_i^2 = -2T_i + 1 =\\
&= -2(y_i - 0.5) + 1 = -2y_{i+1},\\
T_{i+1}^2 &= T_i^2 + \Delta(T_{i+1}^2);
\end{aligned}$$

в противном случае

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i,\\
T_{i+1}^2 &= T_i^2.
\end{aligned}$$

5. Алгоритм Харденбурга построения растрового изображения окружности:

H1. [Инициализация.]

$$x_0 \leftarrow 0, \qquad T_0^2 \leftarrow R^2 - R, \qquad i \leftarrow 0.$$
$$y_0 \leftarrow R, \qquad Y_0^2 \leftarrow R^2,$$

H2. [Основная ось.]

$$x_{i+1} \leftarrow x_i + 1, \qquad Y_{i+1}^2 \leftarrow Y_i^2 - (2x_{i+1} - 1).$$

H3. [Проверка порога.] Если $Y_{i+1}^2 \le T_i^2$, то

$$y_{i+1} \leftarrow y_i - 1, \qquad T_{i+1}^2 \leftarrow T_i^2 - 2y_{i+1};$$

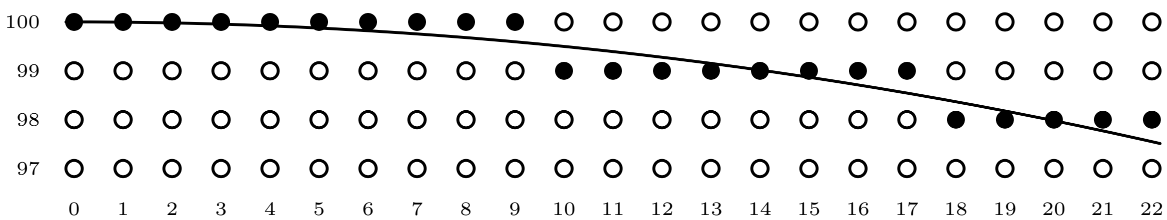
иначе

$$y_{i+1} \leftarrow y_i, \qquad T_{i+1}^2 \leftarrow T_i^2.$$

H4. [Итерация.] Если $x_{i+1} < y_{i+1}$, то $i \leftarrow i + 1$, перейти к шагу H2; иначе конец.

6. Пример (окружность радиуса 100 с центром в точке $(0,0)$):

$i = x_i = X_i$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
T_i^2	9 900	9 900	9 900	9 900	9 900	9 900	9 900	9 900	9 900	9 900	9 702	9 702
Y_i^2	10 000	9 999	9 996	9 991	9 984	9 975	9 964	9 951	9 936	9 919	9 900	9 879
y_i	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	99	99



– Идеальная дуга от $x = 0$ до $x = 22$ для окружности радиуса 100

○ Пиксели на экране

● Поточечная прорисовка дуги от $x = 0$ до $x = 22$ для окружности радиуса 100

Рис. 2